Санкт-Петербургский Академический университет РАН
Кафедра математических и информационных технологий

Реализация и исследование систем типизированного λ-исчисления с контролем изменений наиболее общего типа

К.П. Курьян

Научный руководитель: Д. Н. Москвин

В λ -исчислении две операции: применение и абстракция.

Применение (Application):

F X

С точки зрения программиста:

F (алгоритм) применяется к X (входные данные).

Абстракция (Abstraction):

Пусть M = M[x] — выражение, содержащее x.

Тогда λ x. M обозначает функцию x $\rightarrow$ M[x],

то есть каждому x сопоставляется M[x].

Применение и абстракция работают совместно:
$(\lambda x.\ x + 3)\ 39 = 42$

Def. Отношение β-редукции $\to_\beta$ над Λ :
$(\lambda x.M)\ N \to_\beta M[x := N]$
Пример:
$(\lambda yz.y)(\lambda p.p) \to_\beta \lambda zp.p$

Def. Экспансия - операция обратная редукции
Пример:
$\lambda zp.p \to (\lambda yz.y)(\lambda p.p)$

Переменная — как угодно.
Пример: x: α, y: $\alpha \rightarrow \beta$

Аппликация MN:

$$\frac{M : \sigma \rightarrow \tau \quad N : \sigma}{(MN) : \tau}$$

Пример: x: α, y: $\alpha \rightarrow \beta$. Тогда (yx):β

Абстракция λx.M:

$$\frac{x : \sigma \quad M : \tau}{(\lambda x.M) : \sigma \rightarrow \tau}$$

Пример: Пусть x: α, тогда (λx. x) : $\alpha \rightarrow \alpha$.

Рассмотрим последовательностей редукций
$M \to_\beta M' \to_\beta M''$
Припишем каждому терму тип:
$M\colon \tau \to_\beta M'\colon \tau \to_\beta M''\colon \tau$
Замечание: По теореме о продвижении при редукции тип сохраняется.

Вопрос: будет ли сохраняться тип при экспансии?

Def. Нумералы Черча[1]

$\tilde{0} = \lambda$s z. z

$\tilde{1} = \lambda$ s z. s z

$\tilde{2} = \lambda$ s z. s (s z)

$\tilde{3} = \lambda$ s z. s (s (s z))

$\tilde{4} = \lambda$ s z. s (s (s (s z)))

...

[1] Х. Барендрегт, Лямбда-исчисление, его синтаксис и семантика, **1985**

Рассмотрим нулевой нумерал Черча λs z. z

$$\frac{s : \alpha \quad z : \beta}{0 : \alpha \to \beta \to \beta}$$

Но с другой стороны

$$\frac{s : \alpha \quad z : \alpha}{0 : \alpha \to \alpha \to \alpha}$$

Однако, первый «лучше» в том смысле, что второй получается из него подстановкой типа вместо типовой переменной.

Припишем типы к нумералам Черча:
$\tilde{0}$: $\alpha \to \beta \to \beta$
$\tilde{1}$: $(\beta \to \gamma) \to \beta \to \gamma$
$\tilde{2}$: $(\beta \to \beta) \to \beta \to \beta$
..
$\tilde{n}$: $(\beta \to \beta) \to \beta \to \beta$
Запишем разность между 2 нумералами[1]:
3 - 3 = 0
С одной стороны ясно что тип результата должен быть
$(\beta \to \beta) \to \beta \to \beta$
Но с другой стороны:
$\alpha \to \beta \to \beta$

[1] Джон Харрисон, Введение в функциональное программирование, **1996**

Цель работы

Исследовать эффект изменения типа при экспансии

Задачи

1. Реализовать систему редукции.
2. Реализовать систему вывода типов.
3. Определить условия, при которых имеет место эффект изменения типа.

Результаты для просто типизированного λ-исчисления

Реализованы:

- Система пошаговой редукции термов.
- Система вывода типов на основе построения системы уравнений на типы и их решения.
- Система нахождения изменения наиболее общего типа.

Помимо этого:

- Реализована проверка что тело и типа лямбда выражения является функцией типа из типов аргументов и типа тела.
- Реализована подсистема строкового ввода-вывода термов и их типов.

Результаты для System F

Реализована подсистема System Fw[1] $\subsetneq$ System F

Реализованы:

- Система пошаговой редукции термов.
- Система вывода типов на основе построения системы уравнений на типы и их решения.
- Система нахождения изменения наиболее общего типа типа.

Помимо этого:

- Реализована подсистема строкового ввода-вывода термов и их типов.
- Она были расширена для работы с подсистемой ML.[2]

[1] Х. Барендрегт, Лямбда-исчисление, его синтаксис и семантика, **1985**

[2] Didier Le Botlan and Didier Rémy, Raising ML to the Power of System F, **2009**

Достаточное условие изменения наиболее общего типа

Теорема

В $\lambda\to$, пусть у замкнутого терма имеется редекс следующего вида

$$\lambda f.(\lambda z.P)M$$

При этом $z \in FV(P)$.
А в M имеется вхождение f в левой аппликативной позиции, т.е. fN
Пусть помимо этого в P, нет подобного вхождения.
Тогда при сокращении указанного терма происходит изменение наиболее общего типа.

Достаточное условие сохранения наиболее общего типа

Лемма

Если $M'{:}\alpha$, $M \twoheadrightarrow_\beta M'$

Помимо этого при редукции не должно возникать одинаковых и не исчезающих сокращений

Тогда $M{:}\alpha$.

Следствие

Если для терма M выполняются следующие свойства:

- для произвольного подтерма λx.N из M, то x $\in$ FV(M)
- для произвольного подтерма NP из M, тогда FV(N) $\cup$ FV(P) $= \varnothing$

Так же $M'{:}\alpha$, $M \twoheadrightarrow_\beta M'$

Тогда $M{:}\alpha$.

Наиболее важным достижением работы является то, что использованный нами подход позволил сформулировать, а затем формально доказать достаточные условия изменения и сохранения наиболее общего типа.

Благодарю за внимание!

Благодарю:

Д. Н. Москвин – за ценные консультации	АУ
Е. Р. Кирпичев – за ценные дискуссии по функциональному программированию	Mirantis