

Домашнее задание по анализу на 30 октября

1. а) (2) Докажите, что при данном вещественном $a > -1$

$$\lim \frac{1^a + 2^a + \dots + n^a}{n^{a+1}} = \frac{1}{a+1}.$$

- б) (3) Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n} \ln n}.$$

2. (1) Найдите

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^n)(\ln n)^n}{n - n e^{n(\ln n)} - n e^n \cdot n^{100}}.$$

3. (4) Докажите, что

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\dots}}}}$$

(правая часть есть предел выражений, соответствующих большому конечному количеству корней).

4. (1) Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{1+x} + b^{1+x} + c^{1+x}}{a+b+c} \right)^{1/x}$.

5. (3) Положим $x_n = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}$ (n корней). Докажите, что последовательность $(2 - x_n)/12^n$ имеет конечный положительный предел.

И решите с прошлого раза про то, что нижний предел последовательности $\left(\frac{1+a_n}{a_{n-1}} \right)^n$ не меньше e .