

Криволинейные интегралы, интегралы с параметром и немножко гамма-функции

1. (1 балл) Вычислить криволинейный интеграл по пространственной кривой Γ

$$\int_{\Gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds,$$

где Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

2. (1 балл) Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой Γ , пробегаемой в направлении возрастания параметра t

$$\int_{\Gamma} x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz,$$

где Γ — кривая, заданная параметрически $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. (1 балл) Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$$

по кривой $\Gamma = \{(x, y) : y = x^2 \operatorname{tg}(\pi x/4), 0 \leq x \leq 1\}$ с началом в точке $A(0, 0)$ и концом в точке $B(1, 1)$.

4. (1 балл) Исследуйте на непрерывность по параметру α несобственный интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi - x)^{\alpha}} dx,$$

на множестве $(0, 2)$.

5. (1 балл) Обосновать существование и найти $\Phi'(\alpha)$, если $\Phi(\alpha) = \int_{\operatorname{ch} \alpha}^{\operatorname{sh} \alpha} \ln(1 + x^2 + \alpha^2) dx$.

6. (1 балл) Применяя дифференцирование по параметру α , вычислите интеграл $I(\alpha)$, если

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2(\varphi)) d\varphi.$$

7. **Задача, имеющая прикладное значение.** Определим функцию

$$f(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{a^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вычислите а) (1 балл) $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \alpha, \lambda) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \alpha, \lambda) dx$;

б) (1 балл) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; \alpha, \lambda) dx$.