

Практика 4. Сортировки и бинарный поиск

1. Дано число n . Требуется найти \sqrt{n} используя бинарный поиск.
2. Дан набор из N отрезков $[a_i, b_i]$. Числа a_i, b_i — вещественные.
 - (a) Найти такое вещественное число x , что число отрезков, содержащих x , было максимальным.
 - (b) Найти длину объединения отрезков.
3. Дано n точек на плоскости. Соединить их
 - (a) $(n - 1)$ -звенной ломаной без самопересечений (не замкнутой);
 - (b) n -звенной ломаной без самопересечений (замкнутой)за $O(n \log n)$.
4. Даны два массива a и b одинаковой длины. Нужно найти такую перестановку p , что $\sum_{i=1}^n a_{p_i} b_i \rightarrow \max$
5. Дан массив из $2n$ чисел. Найти минимальное и максимальное число за $3n - 2$ сравнения.

Домашнее задание

Обязательная часть

Дедлайн: 30 сентября, 13:59

1. Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ и L, R ($1 \leq L \leq R \leq n$). Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что $L \leq r - l + 1 \leq R$ и сумма $\sum_{i=l}^r a_i$ была максимальна. Задачу требуется решить за линейное от n время.
2. Дан массив длины n , изначально заполненный нулями, далее на вход алгоритму поступают много запросов вида: "увеличить все числа на отрезке $[l, r]$ на Δ ", где $1 \leq l \leq r \leq n$, $\Delta \in \mathbb{Z}$. В конце необходимо вывести полученный массив. Каждый запрос должен обрабатываться за $O(1)$.
3. Рассмотрим следующий алгоритм быстрой сортировки массива $A[1..n]$.
 - Взять элемент с номером $\text{pivot} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
 - Перенести в отдельный массив все элементы меньше $A[\text{pivot}]$, затем равные, затем большие, сохраняя порядок.
 - Запустить алгоритм рекурсивно на элементах меньших $A[\text{pivot}]$, затем на больших.

Будем оценивать сложность данного алгоритма как суммарную длину всех массивов, на которых будет рекурсивно запущен алгоритм.

Постройте алгоритм, который получает на вход n и строит наиболее сложный пример для данной реализации быстрой сортировки за линейное от n время.

4. В лунную столовую доставили пирожки трех видов. Робот-официант выложил все пирожки в ряд и теперь ему нужно отсортировать их, выложив сперва пирожки с капустой, затем пирожки с мясом, и лишь затем пирожки с повидлом.

Роботу не разрешено нарушать стройный ряд пирожков — все, что он может сделать, это поменять два пирожка местами друг с другом.

Т. к. все пирожки выглядят одинаково, единственный способ различить их — попробовать. Придумайте, как роботу отсортировать пирожки, откусив от каждого не более чем по разу.

Робот обладает конечной памятью.

Необязательная часть

1. (*) Дана последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Найти l, r ($1 \leq l \leq r \leq n$) такие, что значение $(r - l + 1) \min_{i \in [l, r]} a_i$ было бы максимально. Задачу требуется решить за линейное от n время.
2. (*) Дано $2 \cdot n - 1$ коробок с черными и белыми шарами. В i -ой коробке находится w_i белых и b_i черных шаров. Всего в коробках находится W белых и B черных шаров. Требуется выбрать n коробок, чтобы суммарное число белых шаров в них было не менее $\frac{W}{2}$, а черных — $\frac{B}{2}$. Решить за $O(n \log n)$.