Домашнее задание 3. Числа Каталана.

Задач на зачёт: 5

1. Имеются четыре одинаковые колоды, каждая из которых содержит 52 карты. Мы выбираем из этих колод пять карт. Сколько существует различных выборок, состоящих из пяти карт? Выборки считаются одинаковыми, если наборы карт в них совпадают. (Совпадающими считаются карты одинаковой масти и достоинства независимо от того, из какой колоды они взяты.)

   Получите ответ с помощью

   а) производящих функций;

   б) прямых комбинаторных рассуждений.

2. Докажите комбинаторно слеедующую реккурентную формулу для количества беспорядков D_n:

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$$

3. Определите количество способов размещения n различимых для нас гостей по трем различным для нас столам при условии, что за первым столом должен сидеть хотя бы один гость, за вторым столом должно сидеть только нечетное, а за третьим — четное число гостей.

4. Поступающий в университет должен сдать четыре различных экзамена. Сколько есть вариантов успешно сдать экзамены и поступить, если проходной балл равен семнадцати?

5. Имеется мешок, в котором имеется m жетонов, занумерованных числами от 0 до $m-1$. Из мешка вытаскивают очередной жетон, записывают его номер, а затем возвращают жетон обратно в мешок. В результате получается последовательность из k чисел. Требуется узнать, сколько из получающихся таким образом различных числовых последовательностей имеют сумму, равную n. Указанное количество обозначим через $\binom{k,m}{n}$. Докажите, что эти числа рассчитываются по формуле

$$\binom{k,m}{n} = \sum_{i\colon im \le n} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{k+n-im-1}{k-1}. \tag{1}$$

6. Для производящей функции, описывающей количество путей Дика верно соотношение: $f(z) = 1 + zf^2(z)$. Запишите аналогичное равенство для производящей функции, описывающей количество путей Моцкина, и приведите его комбинаторную интерпретацию с использованием комбинаторного смысла сложения и умножения обыкновенных производящих функций.

7. Автобусный билет с шестизначным номером считался когда-то счастливым в случае, если сумма первых трех его цифр совпадала с суммой последних трех цифр. Найдите количество счастливых билетов.