

# Математическая логика и теория вычислимости

## Лекция 6. Логика предикатов первого порядка

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий  
Санкт-Петербургского академического университета

29.03.2018

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения
- 3 Выразимые предикаты
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения
- 3 Выразимые предикаты
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- Логика высказываний достаточно бедна, высказывания в ней представляют собой элементарные неделимые объекты без внутренней структуры.
- Хотелось бы уметь формализовывать утверждения вроде  
*Для любого  $x$  существует такой  $y$ , что их произведение даёт единичный элемент  $I$ .*
- Мы приблизительно представляем, как это делать:

$$\forall x \exists y (x \times y = I)$$

- Нужно, однако, точно описать формализм и задать подходящую семантику.

- $n$ -арным *отношением*  $R$ , заданным на множестве  $M$ , называют некоторое подмножество декартова произведения  $M \times M \times \dots \times M = M^n$ .
- Пример: бинарное отношение равенства  $=$  в  $\mathbb{N}$ . Ему принадлежат все пары вида  $\langle x, x \rangle$  и только они.
- Для конкретных бинарных отношений принято использовать инфиксную запись. Пишут  $3 = 3$ , а не  $\langle 3, 3 \rangle \in =$ .
- $n$ -арным *предикатом*  $P$ , заданным на множестве  $M$ , называют функцию  $P : M^n \rightarrow \mathbb{B}$ .
- Каждый предикат естественным образом порождает отношение, определяемое как прообраз  $T$ .
- Наоборот, каждому отношению можно сопоставить предикат, выступающий в роли характеристической функции этого отношения.

- Начнем формализацию. Что нам потребуется?
- Набор *индивидуальных (предметных) переменных*:  $x, y, z, \dots$
- Набор *функциональных символов* с заданной арностью:  $f^n, g^m, h^k, \dots$ 
  - *Арность (валентность)* — это натуральное число, указывающее количество аргументов, которые требуются при использовании функционального символа.
  - В нашем примере использовался (инфиксный) функциональный символ  $\times$  арности 2.
  - Арность  $\times^2$  указывают только при первоначальном описании формализма.
  - Функциональные символы арности 0 называют *константами* (в нашем примере это I).
- Предполагается, что индивидуальные переменные и функциональные символы берутся из разных, непересекающихся наборов.

- Понятие *терма* (для заданных индивидуальных переменных и функциональных символов) определяется индуктивно:
  - индивидуальная переменная есть терм;
  - константа есть терм;
  - если  $t_1, t_2, \dots, t_n$  — термы, а  $f$  — функциональный символ арности  $n > 0$ , то  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  есть терм.
- Пример терма:

$$x \times (y \times I)$$

- Набор *предикатных символов* с заданной арностью:  
 $P^n, Q^m, R^k, \dots$ 
  - В нашем примере использовался (инфиксный) предикатный символ = арности 2.
  - Арность =<sup>2</sup> указывают только при первоначальном описании формализма.
  - Предикатных символов арности 0 (достаточно двух: “истинный” –  $\top$  и “ложный”  $\perp$ ).

- Набор функциональных и предикатных символов с заданной арностью называется *сигнатурой*.

- Пример сигнатуры:

$$\times^2, I^0, =^2$$

- Предикатный символ =<sup>2</sup> часто входит в сигнатуру и называется *равенством*.
- Часто имеется договоренность о приоритете инфиксных символов сигнатуры (реже — об ассоциативности).



- *Атомарная формула* для заданной сигнатуры это:
  - $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , где  $P$  — предикатный символ арности  $n > 0$ , а  $t_1, t_2, \dots, t_n$  — термы;
  - предикатный символ арности 0.
- Пример атомарной формулы:

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

- Атомарные формулы используют в логике предикатов аналогично пропозициональным переменным в логике высказываний.

- Понятие *формулы* для заданной сигнатуры определяется индуктивно:
  - атомарная формула есть формула;
  - если  $\varphi$  — формула, то  $\neg\varphi$  — формула;
  - если  $\varphi$  и  $\psi$  — формулы, то  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$  — формулы;
  - если  $\varphi$  — формула, а  $x$  — индивидуальная переменная, то  $\forall x\varphi$ ,  $\exists x\varphi$  — формулы.
- Пример формулы первого порядка:

$$\forall x\exists y((x \times y = 1) \wedge (y \times x = 1))$$

- Кванторы имеют высший приоритет, такой же как  $\neg$ .  
(Бывают другие договоренности.)

$$\forall x\neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \neg R(x)$$

Здесь  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — предикатные символы.

- Множество *свободных переменных (параметров)*  $FV(A)$  формулы  $A$  определяется индуктивно:
  - все переменные, входящие в термы, — свободные;
  - свободные переменные атомарной формулы — это свободные переменные входящих в нее термов;
  - $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$ ;
  - $FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ ;
  - $FV(\varphi \vee \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ ;
  - $FV(\varphi \rightarrow \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ ;
  - $FV(\forall x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ ;
  - $FV(\exists x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ .
- Переменные, не являющиеся свободными, называют *связанными*. Их множество обозначают  $BV(A)$ .

- Одна и та же переменная может иметь и связанные и свободные вхождения, а также оказаться связанной несколько раз:

$$\forall x \neg P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \neg R(x)$$

$$\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\forall x (\exists x P(x) \rightarrow Q(x, x))$$

- Формула, в которой нет свободных вхождений переменных, называется *замкнутой формулой (суждением)*.

- Сигнатура теории групп:
  - функциональные символы  $\times^2, I^0, \text{inv}^1$ ;
  - предикатный символ  $=^2$ .
- Аксиомы:

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z ((x \times y) \times z = x \times (y \times z)) \\ \forall x ((x \times I = x) \wedge (I \times x = x)) \\ \forall x ((x \times \text{inv}(x) = I) \wedge (\text{inv}(x) \times x = I))\end{aligned}$$

- Сигнатура теории групп (версия 2):
  - функциональные символы  $\times^2, I^0$ ;
  - предикатный символ  $=^2$ .
- Аксиомы:

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall z ((x \times y) \times z = x \times (y \times z)) \\ \forall x ((x \times I = x) \wedge (I \times x = x)) \\ \forall x \exists y ((x \times y = I) \wedge (y \times x = I))\end{aligned}$$

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения**
- 3 Выразимые предикаты
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- Пусть задана сигнатура. Задать ее *интерпретацию* значит
  - указать непустое множество  $D$ , называемое *носителем* интерпретации;
  - для каждого функционального символа  $f^n$  сигнатуры задать функцию подходящей аности  $[f] : D^n \rightarrow D$ ;
  - для каждого предикатного символа  $P^n$  сигнатуры задать предикат подходящей аности  $[P] : D^n \rightarrow \mathbb{B}$ .
- Если в сигнатуру входит знак равенства, то интерпретация, в которой ему ставится в соответствие совпадение элементов  $D$ , называется *нормальной*.
- **Пример.** Интерпретация сигнатуры теории групп:
  - носитель  $\mathbb{Z}$ ;
  - $[\times] = + : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ;
  - $[I] = 0 : \mathbb{Z}$ ;
  - $[\text{inv}] = - : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ;
  - $[=] = = : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{B}$ .

Получили группу целых чисел с операцией сложения.

- Пусть задана сигнатура и ее интерпретация.
- Задать ее *оценку* значит задать отображение  $\pi$ , ставящее в соответствие каждой индивидуальной переменной некоторый элемент носителя интерпретации.
- Такой элемент называют *значением переменной* при данной оценке.
- Например, для нашей интерпретации сигнатуры теории групп как группы целых со сложением можно задать оценку

$$\pi(x) = -3$$

$$\pi(y) = 42$$

$$\pi(z) = 8$$



- Пусть задана интерпретация сигнатуры и оценка  $\pi$ .
- *Значение терма*  $\tau$  (нотация  $[\tau]_\pi$ ) является элементом носителя и определяется индуктивно:
  - значение индивидуальной переменной напрямую определяется оценкой  $[x]_\pi = \pi(x)$ ;
  - значение константы не зависит от оценки и определяется интерпретацией;
  - если терм  $\tau$  имеет вид  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , где  $t_1, t_2, \dots, t_n$  — термы, то

$$[\tau]_\pi = [f]([t_1]_\pi, [t_2]_\pi, \dots, [t_n]_\pi)$$

- Пример. Для оценки  $\pi$  с предыдущего слайда:

$$[\text{inv}(x) \times (y \times I)]_\pi = -(-3) + (42 + 0) = 45$$

- Пусть задана интерпретация сигнатуры и оценка  $\pi$ .
- *Значение формулы*  $\varphi$  (нотация  $[\varphi]_{\pi}$ ) является элементом  $\mathbb{B} = \{F, T\}$  и определяется индуктивно:

- если  $\varphi$  — атомарная формула  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , то ее значение

$$[\varphi]_{\pi} = [P]([t_1]_{\pi}, [t_2]_{\pi}, \dots, [t_n]_{\pi})$$

- $[T]_{\pi} = T$ ,  $[\perp]_{\pi} = F$  независимо от интерпретации и оценки;
  - $[\neg\varphi]_{\pi} = \neg [\varphi]_{\pi}$ ;
  - $[\varphi \wedge \psi]_{\pi} = [\varphi]_{\pi} \wedge [\psi]_{\pi}$ ;
  - $[\varphi \vee \psi]_{\pi} = [\varphi]_{\pi} \vee [\psi]_{\pi}$ ;
  - $[\varphi \rightarrow \psi]_{\pi} = [\varphi]_{\pi} \rightarrow [\psi]_{\pi}$ ;
  - (про кванторы чуть позже)
- Пример. Для оценки  $\pi$  с пред-предыдущего слайда:

$$\begin{aligned} & [x \times (y \times z) = (x \times y) \times z]_{\pi} = \\ = & ((-3) + (42 + 8) = (-3 + 42) + 8) = (47 = 47) = T \end{aligned}$$

# Значение формулы с квантором существования $\exists$

- Пусть  $d$  — элемент носителя интерпретации  $D$ , а  $\pi$  — некоторая оценка.
- Обозначим через  $\pi, x := d$  оценку, которая совпадает с  $\pi$  всюду, кроме значения переменной  $x$ , которое при этой оценке  $d$ .
- Значение формулы с квантором  $\exists$  определяется как дизъюнкция по всем значениям носителя

$$[\exists x \varphi]_{\pi} = \bigvee_{d \in D} [\varphi]_{\pi, x := d}$$

- Пример.

$$[\exists x (x \times x = 8)]_{\pi} = (0 + 0 = 8) \vee (1 + 1 = 8) \vee \\ \vee (-1 + (-1) = 8) \vee (2 + 2 = 8) \vee (-2 + (-2) = 8) \vee \dots = ?$$

# Значение формулы с квантором всеобщности $\forall$

- Значение формулы с квантором  $\forall$  определяется как конъюнкция по всем значениям носителя

$$[\forall x \varphi]_{\pi} = \bigwedge_{d \in D} [\varphi]_{\pi, x := d}$$

- Пример.

$$\begin{aligned} [\forall x (x \times I = x)]_{\pi} &= (0 + 0 = 0) \wedge (1 + 0 = 1) \wedge \\ &\wedge (-1 + 0 = -1) \wedge (2 + 0 = 2) \wedge (-2 + 0 = -2) \wedge \dots = T \end{aligned}$$

- Значение формулы определяется значениями ее свободных переменных.
- Значение замкнутой формулы не зависит от оценки и полностью определяется выбором интерпретации.

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения
- 3 Выразимые предикаты**
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- Пусть дана сигнатура  $\sigma$  и ее интерпретация с носителем  $D$ .
- Пусть дана формула  $\varphi$ , такая что  $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$ .
- Ее истинность зависит только от значений свободных переменных  $x_1, \dots, x_k$  (параметров). Таким образом формула *выражает* некоторый  $k$ -арный предикат на  $D$ .
- Все предикаты, которые могут быть получены таким способом, называются *выразимыми* в данной сигнатуре. Подмножества  $D^k$ , соответствующие этим предикатам, называют *выразимыми множествами*.
- Объединение, пересечение и проекция выразимых множеств являются выразимыми.

- Сигнатура:
  - функциональный символ  $S^1$ ;
  - предикатный символ  $=^2$ .
- Интерпретация (нормальная):
  - носитель:  $\mathbb{N}$ ;
  - функциональный символ:  $[S] = \lambda x. x + 1$ .
- Предикат «быть больше трех»:

- Сигнатура:
  - функциональный символ  $S^1$ ;
  - предикатный символ  $=^2$ .
- Интерпретация (нормальная):
  - носитель:  $\mathbb{N}$ ;
  - функциональный символ:  $[S] = \lambda x. x + 1$ .
- Предикат «быть больше трех»:

$$\exists y(x = S(S(S(y))))$$

- Предикат «быть нулем»:



- Сигнатура:
  - функциональный символ  $S^1$ ;
  - предикатный символ  $=^2$ .
- Интерпретация (нормальная):
  - носитель:  $\mathbb{N}$ ;
  - функциональный символ:  $[S] = \lambda x. x + 1$ .
- Предикат «быть больше трех»:

$$\exists y(x = S(S(S(y))))$$

- Предикат «быть нулем»:

$$\neg \exists y(x = S(y))$$

- 1 Формулы
- 2 Интерпретации, оценки, значения
- 3 Выразимые предикаты
- 4 Пример: язык элементарной арифметики

- Сигнатура языка элементарной арифметики:
  - функциональные символы  $0^0, S^1, +^2, \cdot^2$ ;
  - предикатный символ  $=^2$ .
- Приоритет  $S$  выше  $\cdot$ , приоритет  $\cdot$  выше  $+$ .
- Примеры термов:

$$S(S(S(0)))$$

$$x + S(0) \cdot y$$

- Примеры формул:

$$x + y = x + S(0) \cdot y$$

$$\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))$$

# Стандартная интерпретация языка элементарной арифметики

- Стандартная интерпретация:

- носитель  $\mathbb{N}$ ;
- функциональные символы:

$$[0] = 0$$

$$[+] = +$$

$$[S] = \lambda x. x + 1$$

$$[\cdot] = \cdot$$

- предикатный символ = имеет нормальную интерпретацию.
- Интерпретация формул на оценке  $\pi(x) = 2, \pi(y) = 3$ :

$$[x + y = x + S(0) \cdot y]_{\pi} = (2 + 3 = 2 + (0 + 1) \cdot 3) = T$$

$$[\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))] = ?$$

# Стандартная интерпретация языка элементарной арифметики

- Стандартная интерпретация:

- носитель  $\mathbb{N}$ ;
- функциональные символы:

$$[0] = 0$$

$$[+] = +$$

$$[S] = \lambda x. x + 1$$

$$[\cdot] = \cdot$$

- предикатный символ = имеет нормальную интерпретацию.
- Интерпретация формул на оценке  $\pi(x) = 2, \pi(y) = 3$ :

$$[x + y = x + S(0) \cdot y]_{\pi} = (2 + 3 = 2 + (0 + 1) \cdot 3) = T$$

$$[\forall x \exists y (x + y = S(S(0)))] = ?$$

- Что будет если поменять носитель на  $\mathbb{Z}$ ?

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение  $\leq$ )?

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение  $\leq$ )? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение  $\leq$ )? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Делимость нацело (отношение  $|$ )?



- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение  $\leq$ )? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Делимость нацело (отношение  $|$ )? Да:

$$x | y \equiv \exists z(x = y \cdot z)$$

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение  $\leq$ )? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Делимость нацело (отношение  $|$ )? Да:

$$x | y \equiv \exists z(x = y \cdot z)$$

- Простота (унарное отношение  $\text{prime}$ )?

- Что можно выразить с помощью стандартной интерпретации языка элементарной арифметики?
- Порядок на натуральных числах (отношение  $\leq$ )? Да:

$$x \leq y \equiv \exists z(y = x + z)$$

- Делимость нацело (отношение  $|$ )? Да:

$$x | y \equiv \exists z(x = y \cdot z)$$

- Простота (унарное отношение  $\text{prime}$ )? Да:

$$\text{prime } x \equiv \neg(x = 0 \vee x = S(0)) \wedge \forall y (y | x \rightarrow y = S(0) \vee y = x)$$