ДЗ 6. Неравенства на собственные числа

Теорема 1 (Куранта-Фишера)**.** Пусть $q(x) = x^\top Ax$. Тогда k-ое по убыванию собственное число λ_k матрицы A есть

$$\lambda_k = \max_{\dim L = k} \min_{\substack{x \in L \\ ||x||=1}} q(x) = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{\substack{x \in L \\ ||x||=1}} q(x).$$

Доказательство. Пусть U — подпространство на котором достигается максимум, причём допустим, что максимум больше λ_k. Тогда рассмотрим подпространство $W = \langle v_k, \dots, v_n \rangle$, где v_i — собственный вектор соответствующий i-ому по убыванию собственному числу. Заметим, что $U \cap W = \{0\}$, так как на W форма принимает значения меньше или равные λ_k. Однако $\dim W = n - k + 1$. Приходим к противоречию с подсчётом размерности пересечения. $\square$

Следствие 1. Пусть U некоторое подпространство, а $q(x) = x^\top Ax$. Пусть собственные числа A — это λ_i, а собственные числа оператора, соответствующего $q(x)|_U$ – это μ_i упорядоченные по убыванию. Тогда

$$\lambda_{i+n-m} \leq \mu_i \leq \lambda_i.$$

Определение 1. Зафиксируем ортонормированный базис пространства V. Пусть форма $q(x) = x^\top Ax$ соответствует симметричной матрице A в этом базисе. Тогда следом формы q назовём $\operatorname{Tr} q(x) = \operatorname{Tr}(A)$.

Лемма 1. Для любого ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_k$ имеет место формула

$$\operatorname{Tr} q = \sum \langle e_i, Ae_i \rangle .$$

В частности след формы не меняется при ортогональной замене.

Следствие 2. Пусть $q(x) = x^\top Ax$, U — некоторое подпространство, $\dim U = k$. Пусть собственные числа A — это λ_i.Тогда

$$\operatorname{Tr} q|_U \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \operatorname{Tr} q|_{V_k},$$

где V_k подпространство натянутое на первые k собственных векторов q.

Вернёмся к методу главных компонент. Мы остановились на том, что на подходящем пространстве L сумма

$$\sum ||pr_L x_i||^2$$

должна быть максимальна. Выберем в L ортонормированный базис $u_1, \dots, u_k$. Тогда перепишем сумму в виде

$$\sum_i ||pr_L x_i||^2 = \sum_i \sum_j \langle x_i, u_j \rangle^2 = \sum_j u_j^\top X^\top X u_j.$$

Здесь X это матрица, чьи строки это x_i.

Таким образом видно, что нас интересует след формы с матрицей $X^\top X$ на L. Теперь видно, что следствие из теоремы Куранта-Фишера и есть, фактически, решение задачи о методе главных компонент. А именно, максимум следа среди всех k-мерных подпространств достигается на подпространстве $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, где v_i — первые k векторов, соответствующие наибольшим собственным числам матрицы $X^\top X$.

Задачи

Задача 1. Пусть A и B — самосопряжённые операторы с собственными числами $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ и $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$. Докажите, что собственные числа оператора $C = A + B$, равные $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n$, удовлетворяют неравенствам:

$$\lambda_k + \mu_n \leq \gamma_k \leq \lambda_k + \mu_1,$$

$$\lambda_n + \mu_k \leq \gamma_k \leq \lambda_1 + \mu_k.$$

Задача 2. Доказать второе равенство в теореме Куранта-Фишера.

Задача 3. Найдите методом главных компонент аффинные подпространства L_1 размерности 1 и L_2 размерности 2 в $\mathbb{R}^3$, наилучшим образом приближающие набор точек

$$x_0 = (1, 0, 0),\ x_1 = (-1, 1, 1),\ x_2 = (0, -1, 1),\ x_3 = (0, -1, -1),\ x_4 = (0, 1, -1).$$

Ответ дать в виде набора векторов, порождающих нужное пространство. Можете считать не руками.