1. Поговорим теперь о нелинейных рекурр. соотношениях. И сделаем это на примере очень важных и интересных чисел – т.н. чисел Каталана.

1) Порядок вычислений в арифметических выраж. задается расстановкой скобок; например: рассм. какое-то арифмет. выраж.:

$$(3-1)\cdot(4+(15-9)\cdot(2+6)).$$

Если стереть все ~~элементы~~ операции (числа и знаки) в этом выраж. за исключением скобок, мы получим, ~~что~~ что скобки образуют т.н. правильную скобочную структуру:

$$()\cdot(()\cdot())$$

Формально: ~~имеется~~ прав. скоб. стр-ра – это ~~структура~~ сост. из $2n$ ~~пар~~ скобок, (левых ~~и правых~~) для кот. выполняется след. свво: когда мы идем ~~по такой строке~~ вдоль этой структуры (строке из скобок) слева направо, то кол-во левых (открывающихся) скобок будет всегда $\geq$ кол-ву правых (закрыв.) скобок – мы никогда не получим ситуации, в которой у нас правых скобок больше, чем левых. ⊕ $\boxed{\text{в конце кол-во левых и правых скобок совпадает}}$

Вот все правильные скобочные структуры с числом пар скобок $n=1,2,3$: (при $n=0$: $C_n=1$).

1) $n=1$: $()$ – 1 шт. 2) $n=2$: $()\cdot()$; $(())$ – 2 шт.

3) $n=3$: $()()()$; $(())()$; $()(())$; $(()())$; $((()))$. – 5 штук.

Так вот, число различных правильных скобочных структур, ~~…~~ состоящих из n пар скобок, наз. числом Каталана $C_n = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$

2) С числами Каталана связано огромное кол-во интереснейших комбинаторных задач. В книге Стенли приведено более 70 таких задач.

Вот интерпретация той же задачи у Виленкина „очередь в кассу": у кассы кинотеатра стоит очередь из $2n$ человек; у половины из них – 100 рублей, у второй – 50-~~копеечные~~ рублевые монеты. Билет стоит 50 руб. В начале продажи касса кинотеатра пуста. Сколько способов

расставить людей в очереди „правильно", т.е. так, 2
чтобы никому не пришлось ждать (у кассы) сдачу?

Очевидно, для $n = 2$: правильных $\exists$ 2 очереди:

$$npnp \quad \text{и} \quad nnpp. \Rightarrow$$

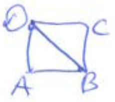
$\Rightarrow$ „n" = „50 коп" = левая скобка; „p" = „1 рубль" = правая скобка

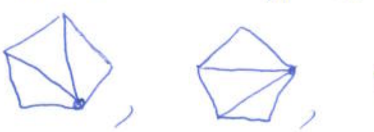
$\Rightarrow$ число способов = C_n – числом Каталана

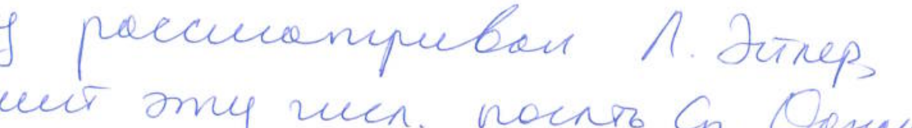
Еще одна интересная комбинаторная интерпретация чисел C_n – кол-во решеточных путей на плоскости, стартующих из начала координат, состоящих из отрезков $(1,1)$ и $(1,-1)$, заканчивающихся на оси абсцисс (вт. $2n$) и никогда не пересекающих ось X (т.н. пути Дика на плоскости). Здесь биекция с C_n следующая:

вектор $(1,1) \sim$ „(" ; вектор $(1,-1) \sim$ „)".

Наконец, еще одна очень важная комбинаторная интерпретация чисел Каталана – это число разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника с занумерованными (т.е. различимыми) вершинами на Δ-ки только диагоналями $(n+2)$-угольника, кот. не пересекаются внутри него.

Пример: $n=1$: $C_n=1$ 

$n=2$: $C_n=2$ 

$n=3$:  $\Rightarrow C_3=5$

Именно эту задачу рассматривал Л. Эйлер, впервые обнаруживший эту числ. посл-ть C_n. Однако, согласно принципу Арнольда, она все же была названа по имени жившего 100 лет спустя бельгийского математика Эжена Каталана, кот. обнаружил связь этих чисел C_n с задачей о построении правильных скобочных структур.

2. Получим рекурр. соотнош. для чисел Каталана C_n

1) Для его получения вновь воспользуемся хорошо знакомым нам принципом разбиения мн-ва на блоки и подсчета элтов в $\forall$ блоке. Как здесь разбить наше мн-во на блоки?

2) Для того, чтобы это сделать, давайте ~~поймем как нам~~ для $\forall$ левой (открывающейся) скобки ~~находить~~ в прав. скоб. структуре введем понятие ~~прав~~ парной ей правой (закрывающейся) скобки?.. Как это сделать?

~~Мы~~ Будем идти от этой левой скобки слева направо и будем искать ~~следуем~~ 1-ю правую скобку, для кот. ~~будет~~ выполнится след. условие: „кол-во левых скобок = кол-ву правых скобок". Так вот, ~~как только для какой-то правой скобки это условие выполнится, так сразу мы назовем~~ если эта скобка и будет наиболее парной для нашей левой скобки. По сути, это — правило построения правильной скобочной подструктуры для $\forall$ открывающейся (левой) скобки в правильной скобочной структуре.

3) Положим этот принцип в основу разбиения мн-ва на блоки, а именно: возьмем крайнюю левую скобку и в k-ый блок поместим все прав. скоб. структуры, такие, что парная ей правая скобка стоит на месте под № $2k$.

Очевидно, что мы получим при этом разбиение нашего мн-ва на непересекающиеся подмн-ва (блоки).

Так, в случае $n=3$ имеем:

$$\underbrace{()()()\,;\ ()(())}_{k=1};\ \underbrace{(())()}_{k=2};\ \underbrace{(()())\,;\ ((()))}_{k=3}$$

4) Сосчитаем теперь кол-во элтов в $\forall$ блоке. Для этого рассмотрим крайнюю левую и парную ей правую скобки. Основное наблюдение здесь состоит в следующ: внутри этой пары скобок стоит прав. скоб. структура, и справа от этой пары скобок также стоит правильная скобочная структура. Почему? В правильной скоб. структуре в целом выполняется всегда усл-е „кол-во левых ск = кол-ву правых"

Почему это так? Внутри: как мы выбирали правую скобку? Из условия кол-во левых скобок = кол-ву правых скобок. Но: если удалить теперь крайнюю левую и парную ей правую скобку, то это условие не нарушится ⇒...

Справа: если в целом это условие выполняется (для $2n$ скобок), и слева это -и- (для $2k$ скобок), то выполн...

То, что тут выполнено условие „кол-во „(" = кол-ву „)" при движении по структуре слева направо, очевидно; это выполнено во всей структуре.

По определению числа k, внутри этой пары скобок стоит правильная скобочная структура и вне ее справа стоит правильная скобочная структура.
Сколько вариантов выбрать правильную скоб. структуру внутри этой ~~…~~ $k^{ой}$ пары скобок? Очевидно, C_{k-1}.
А сколько вариантов -//- вне? Осталось (если изначально было $2n+2$ скобки)

$$n+1-k = n-(k-1)$$

пар скобок $\Rightarrow$ $C_{n-(k-1)}$. $\Rightarrow$ общее кол-во правильных скоб. структур, у которых ~~крайней левой скобке~~ ~~соотв~~ соотв-ует число k, равно

$$C_{k-1}\cdot C_{n-(k-1)}.$$

3) Тогда, (по правилу Σ-ния) Σ-уя по всем k от 1 до $n+1$, получаем следующее рекурр. соотнош. для чисел Каталана:

$$\boxed{C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \ldots + C_n C_0 = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad C_0 = 1} \quad (*)$$

---

3. Как решать такое рекурр. соотношение?

1) Заметим, что оно — нелинейное, да еще и $(n+1)^е$ число зависит от всех $(n+1)$ предыдущих чисел $\Rightarrow$?

2) Однако: можно заметить, что правая часть $(*)$ есть не что иное, как свертка чисел. послед. C_n самой с собой $\Rightarrow$ есть подозрение, что $(*)$ можно решать с использованием ~~…~~ обычнов. произв. функц. (тогда правая часть $(*)$ — есть просто произв. $f(x)\cdot f(x)$).

3) Действительно, введем обычнов. произв. функцию

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots \quad \text{для чисел послед. } C_0, C_1, C_2, \ldots$$

Далее, домножим $(*)$ на x^{n+1} и проΣуем по n от 0 до $+\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \, x^{n+1} \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) - 1 = x\cdot f^2(x) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ для $f(x)$ имеем квадратное ур-е.

4) Решаем его: $\quad x f^2 - f + 1 = 0 \Rightarrow f_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$

<u>Проблема</u>: получили 2 решения, а хотим — одно. Как его выбрать?

5) <u>Легче всего</u> рассуждать с.о.: хотим, чтобы при $x=0$ $\quad f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$; это будет лишь при

$$\boxed{f = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x};} \quad (**)$$

во 2-м случае $f \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

Более строго: можем взять 2е решение и разложить корень по ф-ле бинома Ньютона:

$$f = \frac{1}{2x} + \dots \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ~~ряд~~ полученный формальный степ. ряд будет содержать отрицат. степени x, что невозможно.

---

4. С пом. $(**)$ можно получить явное выр-е для C_n.

1). ~~На деле сосчитаем~~) $f(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2x}\sqrt{1-4x}$;

б) $-\sqrt{1-4x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\dfrac{\frac12\cdot(\frac12-1)(\frac12-2)\dots(\frac12-n+1)}{n!}(-4x)^n$

$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2^{-n}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!}(-1)^n 4^n x^n$ $\quad 2^n$

в) $f(x) = \dfrac{1}{2x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!}x^n =$

$= \dfrac{x}{2x} + \dfrac{1}{2x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n\cdot(n-1)!}x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-2)!}{n[(n-1)!]^2}x^{n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}}$$