

1 Домашнее задание

1.1 (2 балла). Пусть G есть простой граф без треугольников, то есть граф, не содержащий K_3 в качестве своего индуцированного цикла. Показать, что максимальное количество ребер в таком графе не превосходит $n^2/4$ (Th. Mantel).

1.2 (1.5 балла). Решить с помощью Th. Mantel упражнения 1.6 и 1.13.

1.3 (2 балла). Пусть G есть простой граф на 10 вершинах и 26 ребрах. Доказать, что такой граф содержит в качестве своих индуцированных подграфом по меньшей мере пять треугольников.

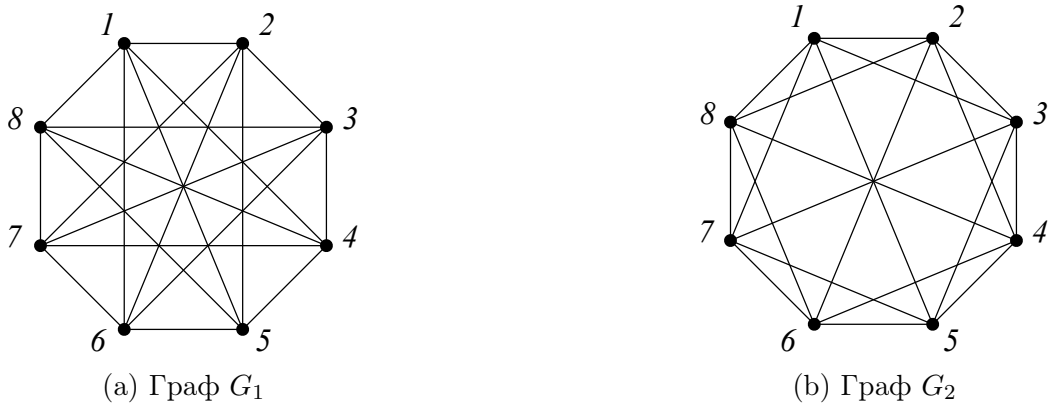


Рис. 1

1.4 (1 балл). Являются ли изоморфными друг другу графы G_1 и G_2 , изображенные на рис.1?

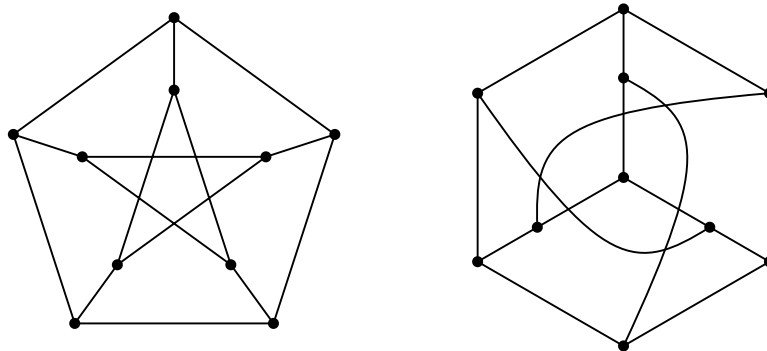


Рис. 2

1.5 (2 балла). Доказать, что изображенные на рис.2 и рис.3 графы соответствуют одному и тому же непомеченному графу — графу Петерсена.

1.6 (2 балла). Доказать, что в графе Петерсена отсутствуют циклы длины 7.

1.7 (2,5 балла). Граф G называется самодополненным (self-complementary), если он изоморфен своему дополнению \bar{G} . Доказать, что самодополненный граф G , построенный на n вершинах, существует тогда и только тогда, когда n или $n - 1$ делится на 4.

1.8 (1,5 балла). На практике мы показали, что существует шесть различных непомеченных связных графов, построенных на четырех вершинах. Для каждого из этих графов описать группу автоморфизмов соответствующего помеченного графа G_i , $i = 1, \dots, 6$, а также подсчитать количество графов, изоморфных G_i .

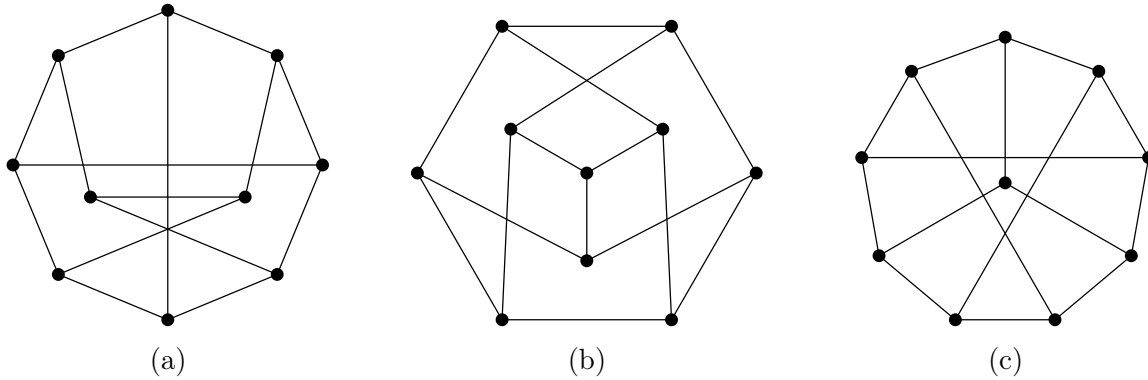


Рис. 3



Рис. 4

1.9 (2 балла). Построить простой граф, группа автоморфизмов которого изоморфна C_3 .

1.10 (1,5 балла). Доказать изоморфизм графов, изображенных на рис.4. Подсчитать количество автоморфизмов графа, изображенного на рис.4,а.

1.11 (2 балла). Рассмотрим граф Петерсена, вершины которого помечены двуэлементными подмножествами 5-множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ согласно описанному на занятии алгоритму. Показать, что любой автоморфизм графа Петерсена отображает цикл $(\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\})$ в 5-цикл $(\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, a\}, \{b, c\}, \{d, e\})$, где (a, b, c, d, e) есть произвольная перестановка 5-элементного множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Доказать, что порядок автоморфизма графа Петерсена равен 120.