

Домашнее задание от 7 сентября 2017

Группа 504/2

Количество баллов на зачет: **6**

1. (0.5 балла) Сколько людей нужно выбрать из группы, состоящей из двадцати супружеских пар, чтобы в выборку гарантированно вошла хотя бы одна супружеская пара?
2. (1.5 балла). Имеется девять положительных целых чисел, ни одно из которых не имеет простого делителя, большего, чем 5. Доказать, что среди этих чисел найдутся по крайней мере два числа, произведение которых представляет собой квадрат некоторого целого числа.
3. (2 балла). Доказать, что в любой выборке из 52 положительных целых чисел найдутся хотя бы два, у которых либо их сумма, либо их разность делится на 100.
4. (2.5 балла) Доказать, что любая последовательность из $n^2 + 1$ различных целых чисел содержит либо убывающую, либо возрастающую подпоследовательность, состоящую из не менее чем $n + 1$ числа.
Указание: рассмотрите для каждого a_i возрастающую последовательность максимальной длины с началом в a_i .
5. (1 балл). Внутри равностороннего треугольника со стороной в один сантиметр расположено пять точек. Доказать, что расстояние между хотя бы двумя из них не больше 0.5 сантиметров.
6. (1 балл). Внутри единичного квадрата разбросано десять точек. Доказать, что существуют хотя бы две из них, которые расположены ближе, чем 0.48, и хотя бы три из них, которые покрываются кругом, радиус которого равен 0.5.
7. (2 балла). Имеется произвольная последовательность a_1, \dots, a_n целых чисел, не обязательно различных. Доказать, что в такой последовательности обязательно найдется отрезок $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l$, сумма элементов которого $\sum_{i=k+1}^l a_i$ делится на n .