Эйлеровы интегралы

Интеграл $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$, сходящийся при $p > 0$, называют гамма-функцией, а интеграл $B(p;q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$, сходящийся при $p, q > 0$ называют бета-функцией. Основные формулы:

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $p > 0$
- $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}$
- $B(p;q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $p, q > 0$

1. Вычислите $\int_0^1 \ln^p(\frac{1}{x})\,dx$
2. Вычислите $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx, m, p, q > 0$
3. Вычислите $\int_0^1 \sqrt{t-t^2}\,dt$
4. Докажите, что $B(p+1,q) = \dfrac{p}{p+q}B(p,q)$
5. Вычислите $\int_0^1 \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}\dfrac{dx}{(x-2)^2}$
6. Вычислите $\int_0^\infty \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx$
7. Докажите, что $\int_0^\infty \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$, $0 < \alpha < 1$