Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма

Большую часть пары мы обсуждали домашнее задание. Перечислим самые полезные факты:

Факт. Пусть A конечномерная ассоциативная алгебра с 1 над полем K. Тогда любой элемент $u \in A$ удовлетворяет полиномиальному уравнению с коэффициентами в K (степени меньшей, чем размерность алгебры). Это приводит к тому, что многие свойства u зависят только от $K[u] = \langle 1, u, u^2, \dots \rangle$ — наименьшей подалгебры, содержащей u (которая коммутативна). А именно, если u — делитель 0, то он делитель 0 уже в $K[u]$. Если u обратим, то обратный лежит в $K[u]$.

Было дано определение группы $GL(V)$ — общей линейной группы, то есть группы всех изоморфизмов из $V \to V$. Если $V = K^n$, то для $GL(K^n)$ имеется специальное обозначение: $GL_n(K)$. Был доказан факт

Факт. Группа $GL_n(K)$ транзитивно(с одной орбитой) действует на всех k-мерных подпространствах в K^n. Матрица стабилизатора подпространства $e_1, \dots, e_k$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где A и C обратимые матрицы размера $k \times k$ и $n-k \times n-k$.

Мы ввели обозначения

Определение 1. Пусть V векторное пространство над полем K. Обозначим за $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$. Это пространство называется пространством линейных функционалов на V или просто двойственным пространством к V.

Мы выяснили, что для конечномерных пространств $\dim V = \dim V^*$ и что имеет место следующий естественный изоморфизм $V \to V^{**}$, который переводит $x \to (f \to f(x))$.

Каждому подпространству $W \leq V$ мы сопоставили пространство $W^{\perp} \leq V^*$, по правилу $W^{\perp} = \{f \in V^* \,|\, \forall w \in W \; f(w) = 0\}$. Это подпространство будем называть ортогоналом к W.

Было дано определение прямой суммы пространств. После чего было показано, как вычислять отображения из прямой суммы и в прямую сумму.

Факт. Рассмотрим пространство $U \oplus V$. Рассмотрим отображения проекции на U, и V компоненты (pr_U, pr_V сответственно) и отображения вложения $i_U(u) = (u, 0)$ $i_V(v) = (0, v)$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend right, "i_U"'] & U \oplus V \arrow[l, "pr_U"'] \arrow[r, "pr_V"] & V. \arrow[l, bend left, "i_V"] \end{tikzcd}$$

С их помощью можно задать естественные изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(U \oplus V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, W) \oplus \mathrm{Hom}(V, W),$$

$$\mathrm{Hom}(W, U \oplus V) \cong \mathrm{Hom}(W, U) \oplus \mathrm{Hom}(W, V).$$

Мы обсудили, что кольцо $\mathrm{End}(U \oplus V)$ может быть представлено как матрицы 2×2, коэффициенты которых есть подходящие линейные отображения

$$\begin{pmatrix} \mathrm{End}(U) & \mathrm{Hom}(V, U) \\ \mathrm{Hom}(U, V) & \mathrm{End}(V) \end{pmatrix}.$$

Если переводить на язык матриц, то при выборе базиса $U \oplus V$ состоящим из базисов U и V ($\dim U = k$, $\dim V = n-k$), матрицу оператора $L\colon U \oplus V \to U \oplus V$ можно естественным образом разделить на блоки

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A и D матрицы размера $k \times k$ и $n-k \times n-k$ — видимо и символизируют элементы $\mathrm{End}(U)$ и $\mathrm{End}(V)$ (а B и C соответствующие Hom-ы). Итого, разделение матрицы на блоки естественно возникает в случае, когда пространство раскладывается в прямую сумму подпространств(и базис выбран согласованным образом).

Под конец мы определили сумму подпространств и рассмотрели последовательность отображений для $U, V \leq W$

$$U \cap V \to U \oplus V \to U + V \leq W$$

которая дала формулу

$$\dim U + \dim V = \dim U \cap V + \dim(U + V).$$

В завершение мы поняли как искать элементы в пересечении, а именно, если $U = \langle u_1, \ldots, u_l \rangle$, $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ то надо составить матрицу $A = (u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_k)$, решить однородное уравнение с матрицей A, найти базис решений, а затем у базисных векторов взять последние k координат $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Вектор $\sum \lambda_i v_i$ будет базисным в пересечении.

Определение 2. Будем говорить, что W раскладывается в прямую сумму своих подпространств U и V, если естественное отображение $U \oplus V \to W$ является изоморфизмом. Будем писать $W = U \oplus V$.

Задачи

Задача 1. Доказать, что для всякого подпространства $U \leq W$ существует $V \leq W$, что $U \oplus V = W$.

Задача 2. Пусть V_1, V_2, V_3 подпространства W. Покажите, что число $\dim(V_i + V_j) \cap V_k + \dim V_i \cap V_j$ одинаково для любой (i, j, k) — перестановки на множестве $\{1, 2, 3\}$.

Задача 3. Найти базис пересечения и объединения подпространств $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ в $\mathbb{R}^5$ если

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Докажите тождество

$$\binom{n}{k}_q = q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q,$$

не используя явной формулы.

Задача 5. Пусть дана матрица $n \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где A и C обратимые матрицы размера $k \times k$ и $n - k \times n - k$. Дайте явную формулу для обратной матрицы в терминах матриц A, B, C.

Определение 3. Элемент x кольца R, удовлетворяющий уравнению $x^2 = x$, называется идемпотентом.

Задача 6. Пусть U, V подпространства в W такие, что $W = U \oplus V$. Покажите, что существует единственный оператор $L\colon W \to W$, что $L^2 = L$ и $\operatorname{Im} L = U$, а $\operatorname{Ker} L = V$. Такой оператор L называется проектором на U вдоль V. Обратно, покажите, что если оператор $L\colon W \to W$ удовлетворяет уравнению $L^2 = L$, то пространство V раскладывается в прямую сумму $\operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Ker} L$.

Задача 7. Пусть R ассоциативное кольцо с единицей, $e \in R$ — идемпотент. Покажите, что любой элемент x единственным образом раскладывается в сумму $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, где $x_1 \in eRe$, $x_2 \in eR(1-e)$, $x_3 \in (1-e)Re$, $x_4 \in (1-e)R(1-e)$. Более того, если в R выполнено, что $xy = z$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Пусть U и V подпространства W. Покажите, что $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$ и $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$ как подпространства в W^*

Определение 4. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис V. В пространстве V^* определим двойственный базис $e'_1, \ldots, e'_n$, однозначно задающийся соотношениями

$$e'_i(e_j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} это 0, если $i \neq j$ и 1, если $i = j$.

Если отождествить пространство функционалов со строчками(с помощью базиса e), то e'_i это строка, где на позиции i стоит единица, а на других позициях стоят нули.

Задача 9. Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ базисы пространства V. Пусть C это матрица перехода из базиса e в базис f. Как будет выглядеть матрица перехода из e' в f', где e', f' двойственные базисы?

Задача 10. Пусть дан набор конечномерных пространств V_i и отображения между ними $d_i \colon V_{i-1} \to V_i$

$$0 = V_{-1} \to V_0 \to \dots \to V_n \to V_{n+1} = 0.$$

а) Пусть d_i обладают свойством, что $\operatorname{Ker} d_{i+1} = \operatorname{Im} d_i$ покажите, что

$$\sum (-1)^i \dim V_i = 0.$$

б) Пусть верно, что $d_{i+1} \circ d_i = 0$. Покажите, что $\operatorname{Im} di \leq \operatorname{Ker} d_{i+1}$. Определим пространства $H_i = \operatorname{Ker} d_{i+1} / \operatorname{Im} d_i$. Докажите формулу

$$\sum (-1)^i \dim V_i = \sum (-1)^i \dim H_i.$$