

1 Домашнее задание

1.1 (0,5 балла). Доказать, что в наборе из любого $(n + 1)$ -го положительного целого числа найдутся по крайней мере два числа, имеющих один и тот же остаток от деления на n .

1.2 (1,5 балла). Доказать, что в последовательности чисел

$$7, 77, 777 \dots$$

один из первых 2014 членов данной последовательности делится на 2013.

1.3 (1,5 балла). Имеется девять положительных целых чисел, ни одно из которых не имеет простого делителя, большего, чем 5. Доказать, что среди этих чисел найдутся по крайней мере два числа, произведение которых представляет собой квадрат некоторого целого числа.

1.4 (2 балла). Выделим в множестве $[2n]$ первых $2n$ целых положительных чисел подмножество $S \subset [2n]$ мощности $(n + 1)$. Доказать, что в этом подмножестве существуют хотя бы два числа, одно из которых делит другое.

1.5 (2 балла). Доказать, что любая последовательность из $n^2 + 1$ целых чисел содержит либо убывающую, либо возрастающую подпоследовательность, состоящую из не менее чем $(n + 1)$ -го числа.

1.6 (2,5 балла). Футбольная команда за сезон отыграла 30 матчей и забила соперникам в совокупности 53 гола. Известно, что в каждой игре команда забивала хотя бы один гол. Доказать, что существует непрерывная последовательность игр, в течение которой команда забила ровно шесть голов.

1.7 (1 балл). Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?

1.8 (1,5 балла). Сколько чисел в диапазоне от 0 до 999 999 не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?

1.9 (1,5 балла). Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих хотя бы одну цифру 7?

1.10 (1,5 балла). Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?

1.11 (1,5 балла). Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?

1.12 (1 балл). Доказать комбинаторно тождество Вандермонта

$$\binom{n + m}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k - i}.$$

1.13 (1,5 балла). Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины n , содержащих k единиц? А бинарных строк, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

1.14 (1,5 балла). Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?