

Подграфы. Операции на графах. Изоморфизм графов.

21 марта 2017 г.

1. Сколько различных остовных подграфов и сколько различных индуцированных подграфов может иметь простой связный граф G , построенный на n вершинах и m ребрах? (определение).
2. Пусть G есть граф, построенный на $n \geq 2$ вершинах, $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ есть минимальная и максимальная степени вершин в графе G . Доказать или опровергнуть следующие утверждения:
 - а) удаление вершины степени $\Delta(G)$ не может увеличить среднюю степень вершин в графе;
 - б) удаление вершины степени $\delta(G)$ не может уменьшить среднюю степень вершин в графе.
3. Доказать, что любой цикл наименьшей длины в графе G представляет собой индуцированный подграф.
4. Пусть G есть граф, обхват $g(G)$ которого меньше бесконечности. Доказать, что для такого графа справедливо неравенство вида $g(G) \leq 2diam(G) + 1$.
5. Пусть G есть простой граф, степень любой вершины которого больше или равна δ , $\delta \geq 2$. Доказать, что в графе G существует цикл длины, большей или равной $\delta + 1$.
6. Пусть G есть простой граф без треугольников, то есть граф, не содержащий K_3 в качестве своего индуцированного цикла. Показать, что максимальное количество ребер в таком графе не превосходит $n^2/4$. [Thm. Mantel]
7. Доказать, что графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их дополнения \bar{G} и \bar{H} .

8. Сколько существует различных непомеченных турниров, построенных на двух, трех и четырех вершинах? Постройте все эти турниры.
9. Сколько существует различных 4-регулярных простых непомеченных графов, построенных на семи вершинах?
10. Описать все графы на n вершинах, для которых любая n -перестановка является автоморфизмом.
11. Найти граф, не изоморфный циклу C_4 , группа автоморфизмов которого совпадает с группой $Aut(C_4)$ автоморфизма графа C_4 .
12. Доказать, что самодополненный граф G , построенный на n вершинах, существует тогда и только тогда, когда n или $n - 1$ делится на 4.