

# Домашнее задание

11 февраля 2014 г.

Определение редукции:

- $(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M [x := N]$
- Если  $M \rightarrow_{\beta} N$ , то  $ML \rightarrow_{\beta} NL$ ,  $LM \rightarrow_{\beta} LN$ ,  $\lambda x.M \rightarrow_{\beta} \lambda x.N$  для любых  $L, x$ .

Терм  $M$  находится в нормальной форме, если в нем невозможно выполнить редукцию, т.е. не существует  $N$  такого, что  $M \rightarrow_{\beta} N$ .

Примеры:

- $(\lambda x.x)y \rightarrow_{\beta} y$
- $x((\lambda x.x)y) \rightarrow_{\beta} xy$
- $(\lambda z.zz)((\lambda x.x)y) \rightarrow_{\beta} (\lambda z.zz)y \rightarrow_{\beta} yy$
- $(\lambda z.zz)((\lambda x.x)y) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.x)y((\lambda x.x)y) \rightarrow_{\beta} y((\lambda x.x)y) \rightarrow_{\beta} yy$
- $(\lambda z.zz)((\lambda x.x)y) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.x)y((\lambda x.x)y) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.x)yy \rightarrow_{\beta} yy$

Кодирование булевских данных в лямбда-термах:

- $true = \lambda xy.x$
- $false = \lambda xy.y$
- $if = \lambda x.x$
- $not = \lambda x.if\ x\ false\ true = \lambda x.x\ false\ true$
- $and = \lambda xy.if\ x\ (if\ y\ true\ false)\ false = \lambda x.x\ (y\ true\ false)\ false$

Кодирование натуральных чисел в лямбда-термах:

- $\bar{0} = \lambda xy.y$
- $\bar{1} = \lambda xy.xy$

- $\bar{2} = \lambda xy.x(xy)$
- $\bar{3} = \lambda xy.x(x(xy))$
- $\bar{n} = \lambda xy.x(x \dots x(xy) \dots)$
- $suc = \lambda nxy.nx(xy)$
- $plus = \lambda nmt.n\ suc\ m$
- $mul = \lambda nmt.n\ (plus\ m)\ \bar{0}$

Собственно, задания:

1. Привести к нормальной форме следующие термы. Напишите все шаги редукции, а не только нормальную форму.
  - (a)  $(\lambda xyz.zyx)yz(\lambda pq.q)$
  - (b)  $(\lambda yz.zy)((\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx))(\lambda y.xxx)$
  - (c)  $(\lambda xyz.x(x(y(y(zz)))))(mul\ \bar{2})\ suc\ \bar{1}$
  - (d)  $SKSKSK$ , где  $S = \lambda xyz.xz(yz)$  и  $K = \lambda xy.x$

(3 балла)
2. Пусть  $pred$  - это такой терм, что  $pred\ \overline{n+1} \rightarrow_{\beta} \bar{n}$ ,  $pred\ \bar{0} \rightarrow_{\beta} \bar{0}$ . Реализовать, используя  $pred$ , следующие термы:
  - (a)  $ge$  возвращает  $true$ , если первый аргумент больше либо равен второго, иначе  $false$ .
  - (b)  $am$  - модуль разности двух натуральных чисел.

(3 балла)
3. Напишите лямбда-терм, реализующий функцию возведения в степень. (1 балл)
4. Реализуйте на любом языке программирования алгоритмы подстановки и приведения терма к нормальной форме. (5 баллов)