

Задания для подготовки к контрольной работе.

Ожидаемые темы задач

- Вычисление пределов функций и последовательностей
- Несобственные интегралы
- Ряды
- Равномерная сходимость

1. Исследовать а) (1 балл) на условную и б) (1 балл) на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n) \sin(n^2)}{n}.$$

2. (2 балла) При всех значениях параметра α исследовать на условную и на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin(2n) \ln^\alpha(n)}{n^\beta}.$$

3. (4 балла) Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{n^2} \right).$$

4. (3 балла) При каких p сходится интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \left| \sin \left(\frac{1}{\cos(x)} \right) \right|^p dx?$$

5. (3 балла) При каких p сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln |\sin(\frac{1}{x})|}{x^p} dx?$$

6. (1 балл) Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x^n + 3x^{-n})$$

равномерно сходится на $[\frac{1}{2}; 2]$.

7. Исследовать равномерную сходимость последовательности

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} \right)$$

на множестве а) (1 балл) $(0; 1/2)$; б) (1 балл) $(1/2; 1)$.

8. (1 балл) Исследовать равномерную сходимость последовательности

$$f_n(x) = xe^{-n^2x} \ln^3(n)$$

на множестве $[0; +\infty)$.

9. Исследовать равномерную сходимость последовательности

$$f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

на множестве а) (1 балл) $[0; A]$, б) (1 балл) $(0; +\infty)$.

10. (1 балл) Найти множества абсолютной и условной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + x^2}).$$

11. Исследовать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{10n + \cos(nx)}$$

на множестве а) (1 балл) $(0; \pi/2)$; б) (1 балл) $[\pi/2; \pi)$.

12. (1 балл) Исследовать на сходимость при всех значениях параметров несобственный интеграл

$$\int_0^{1/3} \frac{\ln^\alpha\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{tg}^\beta(x)} dx.$$

13. (1 балл) Исследовать на сходимость при всех значениях параметров несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} - e^{-\frac{\beta^2}{x^2}} \right) dx$$

14. (1 балл) Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^\alpha| \sin(e^x) dx.$$