k-перестановки из n элементов. Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам. Числа Стирлинга второго рода.

27 февраля 2017 г.

1. Дать комбинаторное доказательство следующих рекуррентных соотношений для чисел $P(n,k)$:

$$P(n,k) = P(n-1,k) + k\,P(n-1,k-1), \qquad n \geq 1, \quad k = 1,\ldots,n;$$

$$P(n,0) = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots; \qquad P(n,k) = 0, \quad k > n.$$

2. Рассмотрим все пятизначные положительные числа, в которых на третьей позиции стоит девятка. Сколько таких чисел делится на три? А если в пятизначных числах присутствует хотя бы одна девятка, и позиции, на которых она присутствует, нам не важны?

3. Подсчитать количество разбиений числа k при ограничениях

$$a_i \geq s_i, \quad i = 1,\ldots,n; \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n =: s \leq k.$$

4. Предположим, что нам нужно разместить r натуральных чисел $1,2,\ldots,r$ и $n-r$ нулей, $r < n$, в циклическом порядке так, чтобы при движении по часовой стрелке последовательность натуральных чисел всегда была бы возрастающей, и так, чтобы никакие два последовательно идущих натуральных числа i, $i+1$, не шли бы друг за другом (включая пару $(r,1)$). Например, при $n \geq 2$ и $r = 1$ мы можем на любую из n позиций поставить единицу, а оставшиеся позиции заполнить нулями. Так как все такие размещения переходят в себя при вращениях по часовой стрелке, то всего имеется ровно одно подобное размещение при любом $n \geq 2$. В случае $r = 2$, $n = 4$ у нас имеется единственное с точностью до циклического сдвига устраивающее нас размещение $(1,0,2,0)$, а в случае $r = 2$ и

$n = 5$ таких размещений в точности два — $(1, 0, 2, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 2, 0)$. Подсчитать количество описанных размещений при произвольных значениях параметров n и r.

5. Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс и чтобы на любой спецкурс записался хотя бы один студент.

6. Доказать справедливость формулы
$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n, i).$$
для любого $n \in \mathbf{Z}_+$.

7. Сколькими способами можно из 60 различных грибов сделать четыре неразличимые связки по пятнадцать грибов в каждой?

8. Получить явные аналитические выражения для чисел Стирлинга $S(n, 1)$, $S(n, n)$, $S(n, 2)$ и $S(n, n-1)$.

9. Найти сумму четырехзначных чисел, которые можно получить при всевозможных перестановках цифр а) $1, 2, 3, 4$; б) $1, 2, 2, 5$.

10. Доказать комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n, 3)$:
$$S(n, 3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

11. Дать комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга:
$$S(n, k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i, k-1)\, k^{i-1}, \qquad n \geq k.$$

12. Доказать, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.

13. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Доказать, что
$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$

14. Доказать, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.