Математическая логика

Практика 8(продолжение), 9(кусочек)

10/05/2018

Эрбранизация

На прошлом занятии мы познакомились с процессом *сколемизации* – построения по данной формуле в ПНФ равновыполнимой ей формуле. Двойственным процессом является так называемая *эрбранизация* – процесс построения по данной формуле в ПНФ с сохранением общезначимости.
Задания. Сколемизируйте результат до Σ_1(то есть эрбранизируйте результат).

- $\neg\exists x\forall y\exists z\forall u P(x,y,z,u)$

Вывод из аксиом в исчислении предикатов

Еще немного задач на вывод из аксиом, так в прошлый раз их было немного:

- $\forall x(\varphi(x)\land\psi(x))\to\forall x\varphi(x)\land\forall x\psi(x))$
- $\exists x(\varphi(x)\lor\psi(x))\to\exists x\varphi(x)\lor\exists x\psi(x))$
- $\psi\to\forall x\varphi(x)\to\forall x(\psi\to\varphi(x)),\ x\notin FV(\psi)$

Невыразимые предикаты

Эта тема предлагалась к самостоятельному изучению, посмотрим, как вы ее усвоили. Пусть у нас есть сигнатура σ и ее интерпретация с носителем D. Мы могли доказать выразимость предиката в ней прямым предъявлением. Например, у нас был язык элементарной арифметики со стандартной интерпретацией, в котором мы могли выразить порядок на натуральных числах вот так:

$$x \leqslant y \equiv \exists z(y = x + z)$$

Если поменять носитель интерпретации на $\mathbb{Z}$, то это уже не работает, порядок станет невыразимым.

$\mathfrak{Def.}$ *Биекция* $\alpha\colon D \to D$ *называется* ***автоморфизмом*** *интерпретации, если все функции и предикаты устойчивы относительно нее. Именно, для любого предикатного символа* P^n *и любого функционального символа* f^n *выполняется:*

$$[P](\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) \Leftrightarrow [P](x_1, \ldots, x_n)$$
$$[f](\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) = \alpha(f(x_1, \ldots, x_n))$$

на любых наборах $x_1, \ldots, x_n \in D$

$\mathfrak{Prop.}$ *Предикат, выразимый в данной сигнатуре устойчив относительно ее автоморфизмов.*

То есть мы получили возможность доказывать невыразимость предиката, предъявив автоморфизм, относительно которого он неустойчив.
Задания. Везде требуется предъявить автоморфизм, относительно которого данный предикат неустойчив(тем самым показав невыразимость его в данной сигнатуре).

- (Это пример с лекции). Сигнатура $(<^2, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, стандартная интерпретация. Невыразимый предикат – $x = 0$.

- Сигнатура $(+^2, =^2, <^2)$, носитель $\mathbb{Q}$, стандартная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 1$. Кроме того, есть ли здесь выразимый предикат вида $x = C$? Что будет, если поменять носитель на $\mathbb{R}$, на $\mathbb{Z}$?

- Сигнатура $(0^0, 1^0, <^2, =^2)$, носитель $\mathbb{R}$, стандартная интерпретация. Невыразимый предикат $x = 1/2$.

Домашнее задание

1. Выведите формулы:

   (a) (1б.) $(\exists x\varphi(x) \to \forall y\psi(y)) \to \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))$

   (b) (1б.) $\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to \forall x\varphi(x) \to \exists x\psi(x)$

2. Постройте ПНФ и сколемизируйте результат до Σ_1:

   (a) (1б.) $\exists xS(x) \vee \forall yP(x, y) \to \exists x\forall yQ(x, y)$

   (b) (1б.) $\forall uP(x, u) \to \neg P(x, y) \wedge \exists xQ(y)$

3. Покажите, что заданый предикат невыразим в заданой сигнатуре.

   (a) (2б.) Сигнатура $(f^1, =^2)$, носитель $\mathbb{Z}$, нормальная интерпретация, $[f](x) = x + 2$. Предикат – $y = x + 1$.

   (b) (2б.) Сигнатура $(P^2, =^2)$, носитель $\mathbb{N}_+$, нормальная интерпретация, $[P](x, y) = x$ делит y. Предикат – $x = 2$.