Теория категорий

Сопряженные функторы

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

План лекции

Рефклективные подкатегории

Определение сопряженности

Единица и коединица сопряжения

Примеры

Рефлективные подкатегории

- Пусть $\mathbf{C}$ – полная подкатегория $\mathbf{D}$. Допустим мы хотим доказать, что вложение $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – эквивалентность.
- Тогда нам нужно найти для каждого объекта X из $\mathbf{D}$ объект из $\mathbf{C}$, изоморфный X.
- Иногда бывает так, что эти категории не эквивалентны, но мы всё же можем найти некоторый объект Y в $\mathbf{C}$, который является в некотором смысле лучшим приближением к X.
- Конкретно, должна существовать стрелка $f : X \to Y$, которая может не быть изоморфизмом, но всё же является в каком-то смысле наилучшей такой стрелкой.

Определение

- Пусть **C** – полная подкатегория **D**. Мы говорим, что **C** – *рефлективная* подкатегория **D**, если для любого объекта X из **D** существует стрелка $f : X \to Y$, где $Y \in \mathbf{C}$, такая что для любой стрелки $f' : X \to Y'$, где $Y' \in \mathbf{C}$, существует уникальный морфизм $h : Y' \to Y$, такой что следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & Y' \arrow[d, dashed, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

- Если вместо стрелки $X \to Y$ существует стрелка $Y \to X$ с аналогичным универсальным свойством, то категория называется *корефлективной*.

Примеры

- Все стрелки в следующей диаргамме являются вложениям рефлективных подкатегорий:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Grp} \arrow[d] \\
\mathbf{CMon} \arrow[r] & \mathbf{Mon}
\end{tikzcd}$$

- Например, чтобы по группе G построить соответствующую ей абелеву группу, нужно взять фактор по коммутанту $G/[G,G]$.

План лекции

Моноиды и слова

- Пусть $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор на категории моноидов.
- Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$ – функтор, сопоставляющий множеству A множество слов в алфавите A.

$$F(A) = \{\ [a_1 \ldots a_n] \mid a_i \in A\ \}$$

- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до морфизма моноидов $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому морфизму моноидов $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g([a])$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Mon}}(F(A), B)$.

Векторные пространства и базисы

- Пусть $\mathbf{Vec}_K$ – категория векторных пространств над полем K.
- Пусть $U : \mathbf{Vec}_K \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор.
- Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vec}_K$ – функтор, сопоставляющий множеству A векторное пространство с базисом A.

$$F(A) = \{\ c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n \mid c_i \in K, a_i \in A\ \}$$

- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до линейного преобразования $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g(1a)$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Vec}}(F(A), B)$.

Кольца и полиномы

- Пусть $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ – забывающий функтор на категории колец.
- Пусть $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Ring}$ – функтор, сопоставляющий множеству X кольцо полиномов с переменными в X.
- Тогда любая функция $f : A \to U(B)$ уникальным образом доопределяется до морфизма колец $g : F(A) \to B$.
- У этого соотвествия существует обратное, каждому линейному преобразованию $g : F(A) \to B$ сопоставляющее функцию $f : A \to U(B)$, $f(a) = g(1a^1)$.
- Таким образом, существует биекция $\varphi : Hom_{\mathbf{Set}}(A, U(B)) \simeq Hom_{\mathbf{Ring}}(F(A), B)$.

Сопряжение

Definition

Сопряжение между категориями $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – это тройка (F, U, φ), состоящая из функторов $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $U : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ и естественного изоморфизма
$\varphi_{A,B} : Hom_{\mathbf{D}}(F(A), B) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(A, U(B))$.

В определении φ является естественным изоморфизмом между функторами $Hom_{\mathbf{D}}(F(-), -), Hom_{\mathbf{C}}(-, U(-)) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \to \mathbf{Set}$.

Во всех примерах, приведенных ранее, изоморфизм $\varphi_{A,B}$ был естественен по A и B. Таким образом, это были примеры сопряжений.

Уникальность сопряженных функторов

- Если (F, U, φ) – сопряжение, то пишут $F \dashv U$ и говорят, что F – *левый сопряженный* к U, а U – *правый сопряженный* к F.
- Если $F \dashv U$ и $F' \dashv U$, то F и F' изоморфны.
- Доказательство: упражнение.
- Если $F \dashv U$ и $F \dashv U'$, то U и U' изоморфны.
- Доказательство: по дуальности.

Сохранение (ко)пределов

Proposition

Левые сопряженные функторы сохраняют копределы. Правые сопряженные функторы сохраняют пределы.

Доказательство.

Второе утверждение является дуальным к первому. Докажем первое. Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – левый сопряженный к $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Пусть $D : J \to \mathbf{C}$ – некоторая диаграмма в $\mathbf{C}$. Пусть $L = colim\ D$ – копредел этой диаграммы.
Пусть $\alpha : F \circ D \to X$ – некоторый коконус в $\mathbf{D}$. Тогда существует уникальная стрелка из L в $G(X)$. По сопряженности она соответствует уникальной стрелки из $F(L)$ в X. Таким образом, $F(L)$ – копредел $F \circ D$. □

План лекции

Определение

- Пусть (F, G) – сопряжение.
- Тогда $\varphi_{A,F(A)} : Hom_{\mathbf{D}}(F(A), F(A)) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(A, GF(A))$ и $\varphi_{G(B),B} : Hom_{\mathbf{D}}(FG(B), B) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(G(B), G(B))$.
- Пусть $\eta_A : A \to GF(A)$ – естественное преобразование, которое определяется как $\eta_A = \varphi_{A,F(A)}(id_{F(A)})$.
- С другой стороны $\varphi_{G(B),B} : Hom_{\mathbf{D}}(FG(B), B) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(G(B), G(B))$.
- Пусть $\epsilon_B : FG(B) \to B$ – естественное преобразование, которое определяется как $\epsilon_B = \varphi^{-1}_{G(B),B}(id_{G(B)})$.
- η_A называется *единицей* сопряжения, а ϵ_B – *коединицей*.

Примеры

- $\eta_A(a)$ возвращает "одноэлементное слово на букве a".
  - Для категории моноидов $\eta_A(a) = [a]$.
  - Для категории векторных пространств $\eta_A(a) = 1a$.
  - Для категории колец $\eta_A(a) = a$ – полином, состоящий из одной переменной a.
- $\epsilon_B : FU(B) \to B$ "вычисляет" формальное выражение в B.
  - Для категории моноидов $\epsilon_B([a_1 \ldots a_n]) = a_1 * \ldots * a_n$.
  - Для категории векторных пространств $\epsilon_B(c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n) = c_1 * a_1 + \ldots + c_n * a_n$.
  - Для категории колец ϵ_B определяется аналогичным образом как функция, вычисляющая полином на данных значениях.

Свойства единицы и коединицы

Proposition

Если (F, G, φ) – сопряжение, то следующие диаграммы коммутируют:

$$\begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[dr, "id_{GB}"'] & GFG(B) \arrow[d, "G\epsilon_B"] \\ & G(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "id_{FA}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\epsilon_{FA}"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

Доказательство

Доказательство.

Условия естественности φ и φ^{-1} можно переписать в следующем виде:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi(f\circ F(h))"] \arrow[d, "h"'] & G(C) \arrow[d, "G(g)"] \\
B \arrow[ur, "\varphi(f)"'] \arrow[r, "\varphi(g\circ f)"'] & G(D)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\varphi^{-1}(f'\circ h)"] \arrow[d, "F(h)"'] & C \arrow[d, "g"] \\
F(B) \arrow[ur, "\varphi^{-1}(f')"'] \arrow[r, "\varphi^{-1}(G(g)\circ f')"'] & D
\end{tikzcd}$$

Нижний треугольник в первой диаграмме дает первое необходимое равенство при $f = id_{FG(B)}$ и $g = \epsilon_B$. Второе необходимое равенство получается из верхнего треугольника во второй диаграмме при $f' = id_{GF(A)}$ и $h = \eta_A$. $\square$

Определение сопряжения через единицу и коединицу

Существует эквивалентное определение понятия сопряжения через единицу и коединицу.

Proposition

Четверка $(F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}, \eta_A : A \to GF(A), \epsilon : FG(B) \to B)$, *состоящая из пары функторов и пары естественных преобразований, удовлетворяющих условию, приведенному в предыдущем утверждении, определяет сопряжение* (F, G, φ), *где* $\varphi(f) = G(f) \circ \eta_A$ *для любого* $f : F(A) \to B$, $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_B \circ F(g)$ *для любого* $g : A \to G(B)$. *Единицей и коединицей этого сопряжения являются* η *и* ϵ *соответственно.*

Доказательство

Доказательство.

Последнее утверждение элементарно следует из определения φ и φ^{-1}. Докажем, что φ и φ^{-1} взаимообратны:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\varphi(f)) = &\ (\text{по определению } \varphi \text{ и } \varphi^{-1})\\
\epsilon_B \circ FG(f) \circ F(\eta_A) = &\ (\text{по естественности } \epsilon)\\
f \circ \epsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = &\ (\text{по свойству } \epsilon \text{ и } \eta)\\
&f.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi^{-1}(g)) = &\ (\text{по определению } \varphi \text{ и } \varphi^{-1})\\
G(\epsilon_B) \circ GF(g) \circ \eta_A = &\ (\text{по естественности } \eta)\\
G(\epsilon_B) \circ \eta_{G(B)} \circ g = &\ (\text{по свойству } \epsilon \text{ и } \eta)\\
&g.
\end{aligned}$$

Доказательство

Доказательство.

Осталось доказать, что φ естественно. Для этого достаточно проверить равенства, приводившиеся в доказательстве предыдущего утверждения.

$$
\begin{aligned}
G(g)\circ\varphi(f) &= && (\text{по определению } \varphi)\\
G(g)\circ G(f)\circ\eta_B &= && (\text{так как } G \text{ -- функтор})\\
G(g\circ f)\circ\eta_B &= && (\text{по определению } \varphi)\\
\varphi(g\circ f). &&&\\
\varphi(f)\circ h &= && (\text{по определению } \varphi)\\
G(f)\circ\eta_B\circ h &= && (\text{по естественности } \eta)\\
G(f)\circ GF(h)\circ\eta_A &= && (\text{по определению } \varphi)\\
\varphi(f\circ F(h)). &&&
\end{aligned}
$$

План лекции

Эквивалентность категорий

- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий, то F одноверeменно и левый и правый сопряженный.
- Любой обратный к F будет его правым и левым сопряженным.

Рефлективные подкатегории

- Если $i : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – функтор вложения полной подкатегории, то i является правым сопряженным тогда и только тогда, когда $\mathbf{C}$ – рефлективная подкатегория.
- Левый сопряженный к i называется рефлектором.
- Если $F \dashv i$, то $\eta_X : X \to i(F(X))$ дает нам необходимую аппроксимацию к X в $\mathbf{C}$.
- Если $\mathbf{C}$ – рефлективная подкатегория, то $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ на объектах определяется очевидным образом, а на морфизмах по универсальному свойству.

Определение

- Декартова категория является декартово замкнутой тогда и только тогда, когда для любого объекта B функтор $- \times B$ является левым сопряженным.
- Действительно, правый сопряженный к нему – это функтор $(-)^B$, а коединица сопряжения $\epsilon_C : C^B \times B \to C$ – это морфизм вычисления ev.
- Биекция, которая появляется в определении сопряженных функторов, – это в точности биекция каррирования.