Домашнее задание №4

1. (2) Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем $b > a > 0$. Докажите, что найдется точка $c \in (a, b)$, такая что
$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - cf'(c).$$

2. (1) Докажите, что если многочлен P степени n имеет n вещественных корней (с учетом кратности), то для любого $k \in \{1, \dots, n-1\}$ многочлен $P^{(k)}$ имеет $n-k$ вещественных корней (с учетом кратности).

3. (1) Пусть $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что если многочлен P имеет не более k ненулевых коэффициентов, то он имеет не более k положительных корней.

4. а) (1) Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — некоторый многочлен от x, где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Найдите предел
$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x)}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Пусть функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана равенством $f(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и равенством $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x > 0$.

б)(1) Докажите, что $f \in C(\mathbb{R})$, то есть функция f непрерывна на $\mathbb{R}$.

в) (1) Докажите, что $f \in C^1(\mathbb{R})$, то есть функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$, и ее производная f' непрерывна на $\mathbb{R}$.

г) (2) Докажите, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, то есть функция f бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ (то есть для любого $m \in \mathbb{N}$ существует m-ая производная функции f).

5. (2) Пусть непрерывная и много раз дифференцируемая на своей области определения функция f удовлетворяет уравнению $e^{f(x)} + x \sin(f(x)) = e^\pi + x$ в некоторой окрестности нуля и равенству $f(0) = \pi$. Найдите разложение функции f в ряд Тейлора в точке 0 с точностью до $o(x^2)$.

6. (1) Пусть функция f дифференцируема в точке a. Найдите предел
$$\lim_{n \to +\infty} \left(f\left(a + \frac{1}{n^2}\right) + f\left(a + \frac{2}{n^2}\right) + \ldots + f\left(a + \frac{n}{n^2}\right) - nf(a) \right)$$

7. (1) Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Докажите, что для любых точек x_1, x_2, $\ldots x_n$, лежащих внутри этого отрезка, существует такая точка $x_0 \in (a, b)$, что
$$f(x_0) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n)).$$

8. (1) а) Предположим, что функции f, g и h — непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b). Определим функцию
$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}, \quad x \in [a, b].$$
Докажите, что существует такое значение $x_0 \in (a, b)$, что $F'(x_0) = 0$.

б) (1) Выведите из пункта а) теоремы Лагранжа и Коши.

9. (2) Пусть функция f дифференцируема на $(0, +\infty)$ и $f'(x) = O(x)$ при $x \to +\infty$. Докажите, что $f(x) = O(x^2)$ при $x \to +\infty$.

10. Пусть функция f дифференцируема на $(0, +\infty)$. Докажите, что

а) (2) если $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

б) (2) если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2\sqrt{x}f'(x))=0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Вычисление производных

11. $\sin(x+\operatorname{tg}(x^{3-3\ln(x)e^x}))$;

12. $\cos(x+\operatorname{ctg}(x^{x+3\ln(x)e^{x\ln(x)}}))$;

13. $\operatorname{sh}\left(x-\operatorname{tg}\left(x^{1+79e^x}\right)\right)$;

14. $\left(\sqrt{(\operatorname{arctg}(2x-3))^{1-3\arcsin(2x-7)+\ln 3}+\sqrt{\frac{2}{x}+x^x}}\right)^{\ln(x)}$.