

Знакомство с конформными преобразованиями

Определение: дробно-линейное преобразование — это преобразование вида

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

1. Найдите дробно-линейную функцию $w(z)$, удовлетворяющую условиям: А) $w(i) = 0, w(\infty) = 1, w(-i) = \infty$; Б) $w(0) = 0, w(1+i) = \infty, w(2i) = 2i$.

Найдите образ полуплоскости $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ при отображениях, задаваемых этими функциями (опишите текстом и формулами или нарисуйте аккуратную картинку).

2. При каких условиях на a, b, c, d дробно-линейное отображение $w = f(z)$ переводит верхнюю полу-плоскость $\operatorname{Im}(z) > 0$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(w) > 0$?

3. Докажите, что каждое дробно-линейное преобразование w имеет хотя бы одну неподвижную точку a (конечную или бесконечную), т.е. существует $a: a = w(a)$.

4. Отобразите конформно всю плоскость с разрезом по дуге окружности $\{z : |z| = 1, \operatorname{Im} < 0\}$ на всю плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ так, чтобы точка 1 и ∞ остались неподвижными.

5. Отобразите конформно закрашенную область (границы не включены) на верхнюю полу-плоскость:

