ML 43. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(Z, =, <, +, 0, 1)$?

ML 44. Будет ли интерпретация $(\mathbb{Q}, =, <)$ элементарно эквивалентна:
а) $(\mathbb{Q}+\mathbb{Q}, =, <)$;
б) $(\mathbb{Q}+\mathbb{R}, =, <)$.
(Подсказка: попробуйте провести элиминацию кванторов).

ML 45. $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ — это две копии целых чисел, причем все числа из второй копии больше чисел из первой. Докажите, что $(\mathbb{Z}, <, =)$ элементарно эквивалентна $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, <, =)$.

ML 46. С помощью теоремы о компактности докажите, что любой частичный порядок на множестве можно продолжить до линейного порядка (т.е. до порядка, в котором любые два элемента сравнимы).

ML 47. Пусть T — теория (множество замкнутых формул) следующего языка: $\{<, R, B\}$, где R (red) и B (blue) унарные предикаты. T содержит все аксиомы плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, а также:
- $\forall xy\, \exists zw\, (x < z < w < y \ \wedge\ R(z) \ \wedge\ B(w))$;
- $\forall x\, (R(x) \ \vee\ B(x))$;
- $\forall x\, (R(x) \leftrightarrow \neg B(x)$.

Докажите, что любые интерпретации данной теории на счетном множестве изоморфны.

ML 22. Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\frac{s_1}{t_1}\right], \ldots, \left[\frac{s_n}{t_n}\right]$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 36. Покажите, что следующие формулы выводимы в исчислении секвенций (формула φ выводима, если выводима $\vdash \varphi$):
а) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$;
б) $\forall x \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \exists x\, P(x,y)$;
в) $(\exists x\, (P(x) \to Q(x))) \to (\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$;
г) $(\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)) \to (\exists x\, (P(x) \to Q(x)))$;
д) $\exists x\, (A(c,x) \to A(x,d))$.

ML 37. Докажите, что:
а) множество $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком изоморфно множеству $\mathbb{Q}_+$ (множество положительных рациональных чисел) со стандартным порядком (т. е. существует биекция, которая сохраняет порядок);
б) счетное множество $\mathbb{M}$, на котором задан плотный порядок (т.е. между любыми двумя элементами есть еще один элемент) и в котором нет минимального и максимального элемента, изоморфно множеству $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком;
в) любая замкнутая формула логики первого порядка истинна в интерпретации $(\mathbb{M}, <)$ (где $\mathbb{M}$ — счетное множество без минимального и максимального элемента, а порядок $<$ плотный) тогда и только тогда, когда она истинна в интерпретации $(\mathbb{Q}, <)$.

$\boxed{\textbf{ML 40.}}$ Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, +)$? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторoм стала возможной.

$\boxed{\textbf{ML 41.}}$ Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, S)$, где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

$\boxed{\textbf{ML 42.}}$ Пусть T — замкнутая формула в некоторой сигнатуре, и пусть существует интерпретация со сколь угодно большим носителем, в которой данная формула истинна. Докажите, что существует интерпретация с бесконечным носителем, в которой данная формула истинна.