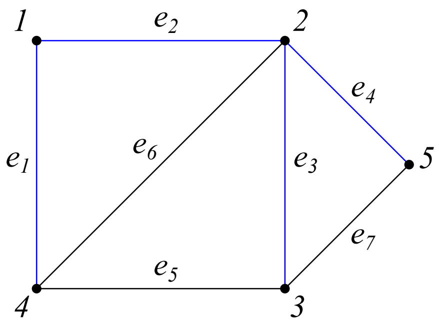
Линейное пространство ребер. Циклы и разрезы

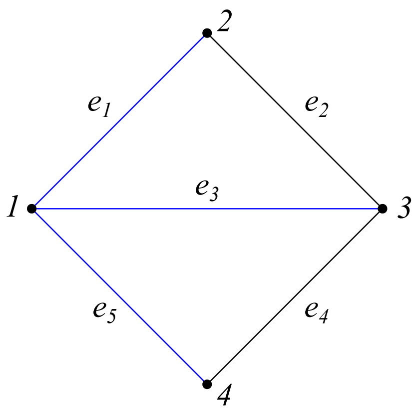
Домашнее задание №4

29 сентября 2017 г.

Обязательная часть



(a)



(b)

Рис. 1

1. (1.5 балла). Для графа G, показанного на рис.1,b, построить набор фундаментальных циклов, а также набор фундаментальных разрезов, связанных с остовным деревом, ребра которого помечены синим цветом на рисунке. Перечислить все векторы, принадлежащие подпространствам $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$, а также $\mathcal{C} \cup \mathcal{B}$.

2. (1.5 балла). Пусть r есть либо размерность $n-1$ подпространства $\mathcal{B}$, либо размерность $m-$ $-n+1$ подпространства $\mathcal{C}$. Доказать, что в каждом случае количество различных базисов, которые можно получить для заданного подпространства, рассчитывается по формуле
$$\frac{1}{r!}(2^r - 2^0) \cdot (2^r - 2^1) \cdot \ldots \cdot (2^r - 2^{r-1}).$$

3. (1.5 балла). Доказать, что любой реберный разрез $[S, \bar{S}]$ можно представить в виде линейной комбинации фундаментальных реберных разрезов ∂_{e_i}.

4. (1.5 балла). Рассмотрим остовное дерево $T(G)$ для графа Петерсена, показанного на рис.2. Описать систему фундаментальных циклов, а также систему фундаментальных разрезов, связанных с этим остовным деревом. Существуют ли отличные от нуля векторы, лежащие в пересечении пространств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$?

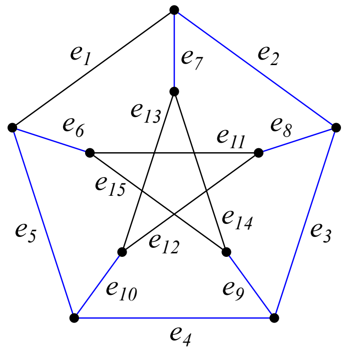


Рис. 2

5. (1.5 балла). Предъявить гамильтонову декомпозицию графов K_7 и K_9.
6. (2 балла). Доказать, что любой полный граф K_{2n+1} допускает гамильтонову декомпозицию на n циклов C_{2n+1}.
7. (1 балл). Доказать, что любой полный граф K_{2n} допускает декомпозицию на n путей P_{2n}.

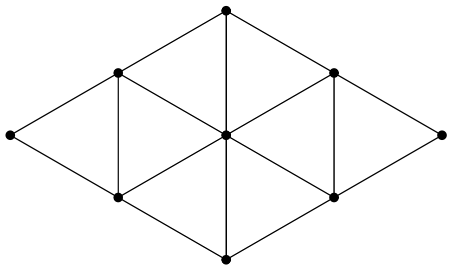


Рис. 3

8. (1 балл). Рассмотрим граф G, показанный на рис.3. Существует ли декомпозиция такого графа на реберно непересекающиеся остовные деревья? А на изоморфные друг другу реберно непересекающиеся остовные деревья?