

### ДЗ на 11-09: билинейные формы, ортогональные дополнения

- 1) В пространстве  $V$  размерности  $n$  задана невырожденная билинейная форма  $f$  и подпространство  $U \leq V$   $\dim U = m$ , такое, что  $f(u, v) = 0$  для любых  $u, v$  из  $U$ . Докажите, что  $m \leq n/2$  и приведите примеры (для четных  $n$ ) когда достигается равенство.
- 2) Дана квадратичная форма  $f = \sum_{i < j} x_i x_j$ . Приведите её к диагональному виду (т.е., к линейной комбинации квадратов)
- 3) Билинейная форма такова, что при любых  $x, y \in V$  из  $f(x, y) = 0$  следует  $f(y, x) = 0$ . Доказать, что  $f$  симметрична или антисимметрична (т.е.  $f(x, y) = f(y, x)$ ).
- 4) В пространстве  $\mathbb{R}^n$  задано стандартное скалярное произведение и зафиксировано  $n + 2$  вектора. Доказать, что скалярное произведение каких-то двух из них неотрицательно (т.е., угол острый или прямой)
- 5) В связном графе  $n$  вершин и  $m$  рёбер. Сколько у него эйлеровых подграфов?
- 6) В  $n$ -элементном множестве выделено  $n + 1$  подмножество нечетной мощности. Докажите, что пересечение каких-то двух из них также нечётно. (воспользуйтесь стандартной билинейной формой)