DL 95. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n + m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $\Pr_r[f(x) = C(x, r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0, 1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой. Покажите, что:

а) для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $\Pr_r[f(x) = C(x, r)] \geq 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0, 1\}^{m'}$ с равными вероятностями;

б) найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

DL 96. Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?

DL 97. Покажите, что для любой случайной величины X выполняется неравенство: $\Pr[X = 0] \leq \frac{D[X]}{E[X]^2}$.

DL 98. Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (независимое множество — это такое множество вершин, что ребер между ними нет). В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Докажите, что $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

DL 99. $|x| = \sqrt{<x, x>}$, где $<x, y>$ это скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Пусть $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ и $|v_i| = 1$. Тогда сущесвуют $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{+1, -1\}$, что $|\epsilon_1 v_1 + \ldots + \epsilon_n v_n| \leq \sqrt{n}$.

DL 100. Коды Уолша-Адамара.

а) Каждому $a \in \{0, 1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0, 1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $\mathtt{WH}(a)$, нетрудно понять, что длина строки $\mathtt{WH}(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0, 1\}^n$ их коды $\mathtt{WH}(a)$ и $\mathtt{WH}(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\mathtt{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0, 1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0, 1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

DL 75. Пусть функция $\mathtt{CONN}$ принимается на вход ребра графа и возвращает 1 тогда и только тогда, когда данный граф связен.

а) Докажите, что глубина дерева решений функции `CONN` равна $\frac{n(n-1)}{2}$, где n — число вершин входного графа.

б) Оцените размер дерева решений функции `CONN`.

DL 81. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DL 91. Пусть $\mathcal{F}$ — это семейство подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$, а p_i — это доля элементов $\mathcal{F}$, которые содержат элемент i. Докажите, что $|\mathcal{F}| \leq 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} H(p_i)}$.

DL 94. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, $I \subseteq [n]$ — произвольное множество. Докажите, что:

а) для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ события $[X_i \in A_i]$ являются независимыми;

б) для любых функций $f_1, f_2, \ldots f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f(X_i)$ являются независимыми;

в) случайные величины $\{X_i\}_{i \in I}$ являются независимыми;

г) для любых функций $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^{[n] \setminus I} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f((X_i)_{i \in I})$ и $g((X_i)_{i \in [n] \setminus I})$ независимы.