

## Равномерная сходимость

1. (1 балл) Может ли последовательность всюду разрывных на  $[a, b]$  функций  $f_n(x)$  равномерно сходиться на  $[a, b]$  к функции  $f(x)$ , непрерывной на  $[a, b]$ ?
2. (1 балл) Существует ли неравномерно сходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю равномерно?
3. (2 балла) Пусть члены ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и положительны при всех  $x \in [a, b]$ . Если ряд имеет сумму, также непрерывную во всём промежутке, то он сходится в этом промежутке равномерно.

4. а) (1 балл) Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  сходится абсолютно и равномерно на отрезке  $[0, 1]$ , где

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}, \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

б) (1 балл) Докажите, что равномерную сходимость этого ряда нельзя доказать, пользуясь признаком Вейерштрасса.

5. (1 балл) Исследовать на непрерывность сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$$

при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

6. (1 балл) Исследовать ряд на равномерную сходимость на  $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\sqrt{n^2 + x^2}}.$$

7. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

- а) (1 балл) Докажите, что  $f \in C([0, +\infty))$  и  $f \in C^\infty(0, +\infty)$ .
  - б) (1 балл) Докажите, что у  $f$  не существует производной в нуле.
8. (1 балл) Сходится ли равномерно на  $\mathbb{R}$  ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg}(nx)}{n + x^2}?$$