

Равномерная сходимость

1. (1 балл) Может ли последовательность всюду разрывных на $[a, b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходиться на $[a, b]$ к функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$?

2. (1 балл) Существует ли неравномерно сходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю равномерно?

3. (2 балла) Пусть члены ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

непрерывны на отрезке $[a, b]$ и положительны при всех $x \in [a, b]$. Если ряд имеет сумму, также непрерывную во всём промежутке, то он сходится в этом промежутке равномерно.

4. а) (1 балл) Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, 1]$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}, \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

б) (1 балл) Докажите, что равномерную сходимость этого ряда нельзя доказать, пользуясь признаком Вейерштрасса.

5. (1 балл) Исследовать на непрерывность сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p + x^2 n^q}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$.

6. (1 балл) Исследовать ряд на равномерную сходимость на \mathbb{R}

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{\sqrt{n^2 + x^2}}.$$

7. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

а) (1 балл) Докажите, что $f \in C([0, +\infty))$ и $f \in C^\infty(0, +\infty)$.

б) (1 балл) Докажите, что у f не существует производной в нуле.

8. (1 балл) Сходится ли равномерно на \mathbb{R} ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg}(nx)}{n + x^2}?$$