

## 1. QuickSort

Посчитаем точно матожидание числа сравнений, которое делает Quicksort на перестановке из  $n$  элементов. Сумма гармонического ряда.

## 2. Задачи про бинарный поиск

1. Найти корень вещественного числа с использованием стандартных арифметических операций.
2. Найти расстояние от точки до прямой в 3D (в  $nD$ ).
3. Корни многочлена
  - a) Найти корень многочлена нечетной степени за  $\mathcal{O}(\log M)$ .
  - b) Зная все корни производной, найти все вещественные корни многочлена за  $\mathcal{O}(n \log M)$ .
  - c) Найти все вещественные корни многочлена за  $\mathcal{O}(n^2 \log M)$ .
4. Бинарный поиск на массиве
  - a) Выразить `upper_bound` для целых чисел через `lower_bound`.
  - b) Докажите, что нельзя сделать и `lower_bound`, и `upper_bound` одновременно, используя в худшем случае меньше чем  $2 \log_2 n + \mathcal{O}(1)$  сравнений?
  - c) Сделать предподсчет за  $\mathcal{O}(n \log n)$ , чтобы за  $\mathcal{O}(\log n)$  отвечать на запрос “сколько раз число  $x$  встречается на отрезке  $[l..r]$ ”?

## 3. Задачи про поиск точки

Каждую из предложенных задач можно решить за время  $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(sort)$ , тем не менее решения за линию от  $n$  на полилогарифм тоже приветствуются. Для разминки предлагается продифференцировать  $e^x$  и найти за  $\mathcal{O}(n)$  площадь пересечения  $n$  прямоугольников со сторонами параллельными осям координат.

1. Даны  $n$  точек на прямой  $x_i$ . Найти точку  $x^*$ :
  - a)  $\sum_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$
  - b)  $\sum_i (x_i - x^*)^2 \rightarrow \min$
  - c)  $\max_i |x_i - x^*| \rightarrow \min$
  - d)  $\max_i (x_i - x^*)^2 \rightarrow \min$
2. Даны  $n$  точек на плоскости  $(x_i, y_i)$ . Найти точку  $(x^*, y^*)$ :
  - a)  $\sum_i [\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$
  - b)  $\sum_i [|x_i - x^*| + |y_i - y^*|] \rightarrow \min$
  - c)  $\sum_i [(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2] \rightarrow \min$
  - d)  $\max_i [\max(|x_i - x^*|, |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$
  - e)  $\max_i [|x_i - x^*| + |y_i - y^*|] \rightarrow \min$
  - f)  $\max_i [(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2] \rightarrow \min$
3. На прямой расположено  $n$  точек  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Каждая точка имеет вес  $w_i \geq 0$ . Требуется найти точку  $q$ :  $\sum_i [w_i \cdot |p_i - q|] \rightarrow \min$ .

## 4. Домашнее задание

### 4.1. Обязательная часть

- (1) Предложите алгоритм на основе бинарного поиска для поиска остовного дерева графа, в котором максимальный вес ребра минимален.
- (1) Даны  $n$  точек на прямой  $x_i$  с весами  $w_i \geq 0$ . Найти точку  $x^*$ :  
$$\sum_i [w_i(x_i - x^*)^2] \rightarrow \min$$
- (1) Даны  $n$  точек на плоскости  $(x_i, y_i)$  с весами  $w_i \geq 0$ . Найти точку  $(x^*, y^*)$ :  
$$\sum_i [w_i(|x_i - x^*| + |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$$
- (1) Даны  $n$  точек на плоскости  $(x_i, y_i)$  с весами  $w_i \geq 0$ . Найти точку  $(x^*, y^*)$ :  
$$\max_i [w_i(|x_i - x^*| + |y_i - y^*|)] \rightarrow \min$$
- (3) На прямой расположено  $n$  точек  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Каждая точка имеет вес  $w_i \geq 0$ . Выбрать две точки  $q_1, q_2$ :  $\sum_i [w_i \cdot \min(|p_i - q_1|, |p_i - q_2|)] \rightarrow \min$ .
- (2) Вариация на тему **Pairing heap**: докажите, что если список  $[a_1, \dots, a_n]$  заменить на произвольное паросочетание  $[(a_{i_1}, a_{j_1}), \dots, (a_{i_{n/2}}, a_{j_{n/2}})]$ , то амортизированное время работы операции **DeleteMin** будет  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ .

### 4.2. Дополнительная часть

- (6) Есть  $n$  отрезков на окружности. Выбрать максимальное по размеру множество, покрывающее каждую точку не более чем 2 раза.
  - (3 из 6)  $\mathcal{O}(n^3)$
  - (4 из 6)  $o(n^3)$
  - (6 из 6)  $\mathcal{O}(n \cdot \text{Poly}(\log n))$
- (4) Даны  $n$  точек на плоскости  $(x_i, y_i)$  с весами  $w_i \geq 0$ . Найти точку  $(x^*, y^*)$ :  
$$\max_i [w_i((x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2)] \rightarrow \min$$

Требуется решение за линию на полилогарифм.
- (5) На прямой расположено  $n$  точек  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Каждая точка имеет вес  $w_i \geq 0$ . Выбрать три точки  $q_1, q_2, q_3$ :  $\sum_i [w_i \cdot \min(|p_i - q_1|, |p_i - q_2|, |p_i - q_3|)] \rightarrow \min$ .

Требуется решение за линию на полилогарифм.