⑦ Раскладка неразличимых предметов по неразличимым ящикам. Разбиения чисел

1. Вернемся к задачам о марках и бандеролях. Напомним, что нам надо было отправить по почте бандероль стоимостью 18 руб., наклеив на неё (сколько можно это сделать, в нужном сочетании) марки ~~стоимостью~~ достоинством в 4, 6 и 10 рублей. При этом способы наклейки марок, отличающиеся как полным так и порядком наклейки марок, считались различными.

Однако на практике нас, как правило, не интересует порядок наклейки марок. Все, что нас интересует — это чтобы стоимость наклеенных марок совпадала со стоимостью отправки бандероли. В этом случае, как нетрудно видеть, ∃ всего 3 ~~способа~~ различных способа наклейки марок:

$$6+6+6,\quad 4+4+10,\quad 4+4+4+6.$$

Как формализовать эту задачу?

Нетрудно ~~видеть~~ убедиться, что с формальной точки зрения ~~данная задача~~ дело сводится к решению в целых неотрицательных числах уравнения вида

$$4y_4+6y_6+10y_{10}=n$$

При этом все решения нашей задачи при $n=18$ отвечают следующим тройкам чисел (y_4, y_6, y_{10}):

$$(0,3,0);\ (2,0,1);\ (3,1,0).$$

Вопрос: как же решать такую задачу в общем случае?

2. Первое, что хочется — это записать для этой задачи какое-то рекуррентное соотношение.

1) Напомним, что в случае, когда порядок наклейки марок был важен, мы разбивали все множество вариантов на 3 непересекающихся блока в зависимости от того, марка какого достоинства была наклеена последней ⇒ получали рекурр. соотнош. вида

$$F(n)=F(n-4)+F(n-6)+F(n-10)$$

Здесь этот подход не работает ⇒ нужно искать какой-то другой принцип разбиения мн-ва вариантов на блоки. 2

2) Воспользуемся след. идеей: Тогда разобьем все мн-во ~~вариантов~~ способов наклейки на блоки в зависимости от того, использовалась ли хоть раз (при ~~[illegible]~~ данном варианте наклейки марок на конверт) марка данного достоинства (напр.: марка за 10 р).

Пусть $\Phi(n;\,4,6,10)$ – кол-во способов наклейки марок общей стоимостью n рублей.

В случае, когда она использовалась, кол-во способов наклейки ~~[illegible]~~, очевидно, равно

$$\Phi(n-10;\,4,6,10).$$

В случае же, когда она не использовалась вовсе, имеем кол-во способов, равное $\Phi(n;\,4,6)$.

Таким образом, $\Phi(n;\,4,6,10)=\Phi(n-10;\,4,6,10)+\Phi(n;\,4,6)$.

3) Видно, что в каждом конкретном случае, т.е. при $\forall$ фиксированном n, данный подход приводит к успеху, однако какого-то замкнутого рекурр. соотношения для этой задачи получить не удается.

3. Несмотря на этот печальный результат, некое формальное решение этой задачи все же удается построить, и получается это решение с использованием аппарата обыкновенных производящих ф-ций. Как?

1) Составим обыкнов. произв. ф-цию вида

$$f(x)=(1+x^4+x^8+x^{12}+\dots)(1+x^6+x^{12}+x^{18}+\dots)(1+x^{10}+x^{20}+\dots)$$

Тогда: при перемножении этих скобок (рядов) показатели ~~[illegible]~~ икса в показателе x складываются, давая нам все возможные ~~разложения~~ значения выражения вида ~~числа n на слагаемые нужного~~ ~~нам~~ ~~вида~~ ~~[illegible]~~ ~~в итоге~~

$4y_1+6y_2+10y_3$ $\forall y_1, y_2, y_3 \dots$

~~Т.о., коэффициент при слагаемом При этом~~
~~x^n в $f(x)$ встречается ровно столько раз, сколько~~
~~сколько $\exists$ способов разбиения n на слагаемые~~
~~требуемого нам вида.~~ И все, что нам теперь остается — это сосчитать кол-во иксов с одинаковыми показателями n.

Например, в случае $n = 18$ имеем три таких слагаемых

$$x^{12} \cdot x^{6} + x^{18} + x^{8} \cdot x^{10} = x^{3 \cdot 4} \cdot x^{1 \cdot 6} + x^{3 \cdot 6} + x^{2 \cdot 4} \cdot x^{1 \cdot 10} = 3x^{18}.$$

2) Очевидно, что данный подход обобщается и на $\forall$ другие задачи подобного типа. Например, предположим, что мы имеем право наклеивать на бандероль не более одной марки данного достоинства. Тогда производящая функция $f(x)$, очевидно, $=$

$$f(x) = (1+x^4)(1+x^6)(1+x^{10}) = 1+x^4+x^6+\underline{x^{4+6}}+\underline{x^{10}}+x^{14}+x^{16}+x^{20}$$

~~В частности~~, Мы видим, например, что сумму в 10 рублей мы можем получить, наклеивая либо по одной марке достоинством в 4 и в 6 рублей, либо наклеивая одну марку достоинством в 10 рублей.

С формальной т. зрения данная задача эквивалентна решению в целых

$$4y_4 + 6y_6 + 10y_{10} = n$$

при условии, что все $y_m = 0$ или 1, $m = 4, 6, 10$.

3) Итак, мы на примерах научились решать задачи о разбиении числа n на слагаемые при разного рода ограничениях как на сами слагаемые, так и на их число, и научились мы это делать с пом. обычнов. произв. функц.

В качестве некоего апофеоза давайте решим задачу о разбиении (partition) числа $n > 0$ на слагаемые при отсутствии каких-либо ограничений как на (сами слагаемые), так и на их число.

Формальное опред.: см. стр. 9

а) Кол-во таких разбиений традиционно обозначается
Давайте найдем $p(n)$ для нескольких первых чисел
через $p(n)$. Очевидно, что $p(1) = 1$ ...

$p(2)=2$, т.к. $2=1+1=2$.

Далее, $p(3)=3$, т.к. $3=1+1+1=2+1=3$. Теперь,

$$4=4=3+1=2+2=1+1+1+1=2+1+1 \Rightarrow p(4)=5 \dots$$

$$5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1 \Rightarrow p(5)=7.$$

~~В общем случае дело сводится к решению ур-ия~~

~~$1y_1+2y_2+\dots+ny_n=n$~~ см. стр. 9

Но: такое ур-ие мы умеем решать с пом. ОПФ

~~в неотрицательных целых числах~~. Обыкновенная производящая ф-ция для такого ур-ия при фиксир. n имеет, очевидно, след. вид:

$$f(x)=(1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)\dots(1+x^n+x^{2n}+\dots)=$$

$$=\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}\cdot\frac{1}{(1-x^3)}\cdot\dots\cdot\frac{1}{(1-x^n)}.$$

б) ~~Теперь: а как бы~~ Но: нам нужно записать обыкновенную производящую ф-цию, ~~позволяющую получать решение~~ для ~~при~~ произвольного числа n? Очевидно, что она должна иметь вид формально ~~беск~~-ного произведения вида

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}\cdot\dots\cdot\frac{1}{(1-x^n)}\cdot\dots$$

Почему формально? Потому что при $\forall$ фиксир. n кол-во слагаемых с x^n всегда будет конечно.

Этот результат был получен Эйлером в 1740х годах.

4) Аппарат обыкновенных производящих функций позволяет доказывать очень интересные результаты, касающиеся свойств разного рода разбиений чисел на слагаемые.

В качестве примера рассмотрим задачу о разбиении числа n в случае, когда $\forall$ число может входить в сумму не более 1 раза.

а) Мы знаем, что в этом случае произв. ф-ция имеет вид

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdot\dots\cdot(1+x^n)\cdot\dots \quad \text{для } \forall n>0.$$

б) Но: $(1+x^j)=\dfrac{(1-x^{2j})}{(1-x^j)}$, поэтому

$$f(x)=\frac{(1-x^2)}{(1-x)}\cdot\frac{(1-x^4)}{(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^6)}{(1-x^3)}\cdots\frac{(1-x^{2n})}{(1-x^n)}\cdots$$

Заметим, что в числителе остаются лишь ~~сомножители~~ сомножители с четными степенями икса. Они постепенно сокращаются с аналогичными сомножителями в знаменателе ⇒
⇒ в случае данного ряда ~~...~~ они все постепенно сократятся ⇒
⇒ получим: $f(x)=\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^3)}\cdot\frac{1}{(1-x^5)}\cdots\frac{1}{(1-x^{2n-1})}=$

$$=(1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots$$ а это есть ⇒ производящая функция, описывающая разбиение n на сумму <u>нечетных</u> чисел.

в) Т.о. доказана след.

<u>Th</u>. Количество способов разбиения n ~~на сумму~~, в случае, когда ∀ число входит в сумму не более 1 раза = количеству разбиений n на сумму нечетных чисел.

г) <u>Пример</u>: ∃ $n=5$ ⇒ ~~в случ~~ имеем 3 случая, когда в разбиение ~~входят все~~ ∀ число входит не более 1 раза
$5,\ 4+1,\ 3+2$.

Далее, $5=5=3+1+1=1+1+1+1+1$ ⇒ 3 случая разбиения n на сумму нечетных чисел.

---

4. Это все, конечно же, замечательно, но: какое это все имеет отношение:

а) к задачам раскладки неразличимых предметов по неразличимым ящикам, и

б) к комбинаторной интерпретации ряда обыкновенных производящих функций?

Конечно же, очевидно, что самое прямое.

1) Рассмотрим вначале следующую задачу, связанную с рядом $2^х$ обыкновенных производящих функций. Зафиксируем вначале два

натуральных числа $j_1 < j_2$ и рассм. произв. функции вида

$$f(x) = 1 + x^{j_1} + x^{2j_1} + \dots + x^{nj_1} + \dots$$

$$g(x) = 1 + x^{j_2} + x^{2j_2} + \dots + x^{nj_2} + \dots$$

Произведение этих функций будет обычнов. произв. функция $h(x)$ вида

$$h(x) = f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots, \text{ где}$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \text{ где}$$

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = kj_1,\ k=0,1,2,\dots \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}; \quad b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = kj_2,\ k=0,1,2,\dots \\ 0, & \text{в прот. случае} \end{cases}$$

2) Каков комбинаторный смысл коэф-та c_n и, как следствие, такого произв. 2х обычн. произв. функций $f(x)$ и $g(x)$?

а) Мы берем линейно упорядоченное мн-во = интервал целых неотрицат. чисел от 0 до n, и разбиваем его всеми возможными способами на 2 интервала. Затем, если у нас 1й интервал (длины i) оказывается кратен j_1, то мы совершаем след. комбинаторное действие: ~~рассаживаем~~ мы берем i/j_1 ~~ящиков~~ неразличимых ящиков и рассаживаем в каждый из них по j_1 неразличимых предметов. Так как и предметы, и ящики - неразличимы, то сделать мы это можем единственным способом. Если же длина i 1го интервала не кратна j_1, то мы подобное действие совершить не можем и потому положим $a_i = 0$. Аналогично с b_{n-i}: если длина $(n-i)$ 2го интервала оказывается кратной j_2, то мы берем $(n-i)/j_2$ неразличимых ящиков и рассаживаем ~~всех~~ в каждый из них по j_2 неразличимых предмета. Ясно, что это также можно сделать одним способом. Если же длина не кратна j_2 то такое действие мы совершить не можем $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ положим $b_{n-i} = 0$

б) Что же в результате мы имеем? Очевидно, что в C_n войдут только те слагаемые, для которых a_i и b_{n-i} одновременно окажутся отличными от нуля. При этом каждое такое ненулевое слагаемое даст нам ~~новое разбиение n на 2 слагаемых~~ с одной стороны некоторый вариант раскладки n неразличимых предметов по $i/j_1 + (n-i)/j_2$ ящикам, такой, что в 1^x i/j_1 ящиках находится по j_1 предмета, а в последних $(n-i)/j_2$ ящиках находится по j_2 предмета, а с другой стороны, $\forall$ такое же слагаемое дает нам некоторое разбиение n в сумму не более чем 2^x слагаемых вида

$$j_1 y_{j_1} + j_2 y_{j_2} = n,$$

в котором $y_{j_1} = i/j_1$, $y_{j_2} = (n-i)/j_2$. Число же ненулевых слагаемых в C_n дает нам общее число вариантов совершить вышеописанные действия.

3) Пример $\exists$ $j_1 = 2$; $j_2 = 3$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots,$$
$$g(x) = 1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3n} + \dots$$

Тогда $h(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) =$

$$= 1 + x^2 + x^3 + x^4 + \underbrace{x^2 \cdot x^3}_{=x^5} + \underbrace{x^6 + x^6}_{=2x^6} + x^3 \cdot x^4 + \dots$$

Коэффициент $C_6 = a_0 b_6 + a_6 b_0$ и отвечает:

раскладка по ящикам 6 предметов:	разбиение числа 6:
а) $a_0 = 1, b_6 = 1$: $\lvert\circ\circ\circ\lvert\circ\circ\circ\lvert$	а) $a_0 = 1, b_6 = 1$: $2y_2 + 3y_3 = 6$, $y_2 = 0, y_3 = 2$
б) $a_6 = 1, b_0 = 1$: $\lvert\circ\circ\lvert\circ\circ\lvert\circ\circ\lvert$	б) $a_6 = 1, b_0 = 1$: $2y_2 + 3y_3 = 6$, $y_2 = 3, y_2 = 0$.

4) Очевидные обобщения этого подхода.

а) Во-первых, это был самый случай, в котором

ничных ограничений на количество ящиков,
в кот. можно класть предметы как 1-го, так и 2-го типа, не было. На языке разбиений числа n на слагаемые это означает, что не было ограничений на количество вхождений чисел j_1 и j_2 в это разбиение.

Если такие ограничения имеются, то они регулируются числами a_i и b_{n-i}.

Пример: Пусть мы в разложении не можем использовать более двух ящиков как для 1-го, так и для 2-го интервалов (т.е.: ~~не более~~ числа 2 и 3 не могут входить в разбиение n на слагаемые более 2-х раз). Тогда

$$f(x) = (1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6) =$$
$$= 1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^{10} \Rightarrow C_6 = 1:$$
$$2i_2+3i_3=6;\ i_2=0,\ i_3=2;$$
$$\underline{\circ\circ\circ,\circ\circ\circ,}$$

б) Далее мы пока рассматриваем случай, отвечающий произведению двух обыкновенных производящих функций. Понятно, как обобщить этот подход на случай произведения k обыкновенных производящих функций.

5) Замечание. В задачах разложения числа n на слагаемые (т.е. в задачах раскладки ~~ряда~~ n неразличимых предметов по различимым ящикам) достаточно легко решается случай фиксированного числа k ~~заданного~~ слагаемых (ящиков), и несколько сложнее — случай произвольного k.

В задачах разбиения ~~числа~~ числа n на слагаемые (т.е. в задачах раскладки n неразличимых предметов по неразличимым ящикам) все ровно наоборот: мы выше достаточно легко решили задачи, в кот. n - фиксировано, а k - нет. Задачи же раскладки предметов по фиксированному числу k ящиков оказываются здесь более сложными. ~~Однако~~ При их решении достаточно успешно применяется т.н. диаграммная техника, изучению ~~которой~~ и применению которой и будет посвящен следующий параграф.

~~Опр-ие~~ Разбиением $n \in \mathbb{N}$ на слагаемые наз. неупорядоченный набор натур. чисел, Σ кот. $= n$ (или, как говорят, на части)

⊛. ~~Почему?~~ Формально: это решения ур-ия $\boxed{n \geq x_i \geq 0}$

$$(*) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \qquad \cancel{x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n \geq 1}$$

Почему слагаемых как так n штук? больше быть не может: n слагаемых - это, очевидно, случай n единиц.

~~Линейная упорядоченность иксов: это и есть~~

Так как порядок слагаемых роли не играет, то мы можем считать, что x_i (нестрого) упорядочены - например, по убыванию, т.е.:

$$n \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n = 0.$$

~~Почему слагаемых~~ Так, $5 = 4+1 = 3+2 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$

Количество различных разбиений числа n обозначается традиционно через $p(n)$. Давайте сосчитаем число $p(n)$ для нескольких $1^{\text{х}}$ n: ...

Теперь: $\exists\, y_i$ - это кол-во частей (или слагаемых) разбиения числа n, равных в точности i (т.е. число $x_k = i$). Тогда, очевидно, (*) можно переписать в след. виде:

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \ldots + ny_n, \quad \text{где} \quad y_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Пример: $5 = 2+2+1 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ y_3 = y_4 = y_5 = 0.$