

Разбор

Решения тех задач, которые, как мне кажется, я плохо разобрал на паре

Используя определение произведения обыкновенных производящих функций, вычислить сумму

$$s_n = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} 4^{-k}.$$

Подсказка: для какой последовательности производящая функция равна $(1+z)^{-1/2}$?

Решение Рассмотрим производящую функцию $(1+z)^{-1/2}$. Для соответствующей ей последовательности n -ый член равен

$$a_n = \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1-2n}{2}}{n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! (2n)!!} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{n! n!} = (-4)^n \binom{2n}{n}$$

Значит, производящая функция для $\binom{2n}{n} 4^{-n}$ это $(1-z)^{-1/2}$. Значит производящей функцией для s_n будет являться произведение $(1-z)^{-1/2}$ и производящей функции для константой 1, то есть $(1-z)^{-1}$, то есть $(1-z)^{-3/2}$.

Ответ:

$$s_n = (-1)^n \binom{-3/2}{n} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n+1}{2}}{n!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

Используя определение произведения экспоненциальных производящих функций, вычислить сумму

$$s_n(r) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} r^{n-k}.$$

Решение Рассмотрим производящую функцию $f(z)$ для $s_n(r)$. Как видно из определения $s_n(r)$, она будет произведением производящих функций для $-(-1)^k k$ и r^k . Посчитаем их:

$$\sum -\frac{k(-z)^k}{k!} = z \sum \frac{(-z)^{k-1}}{(k-1)!} = ze^{-z}$$

$$\sum \frac{(rz)^k}{k!} = e^{rz}$$

Значит, итоговая производящая функция — это $ze^{(r-1)z} = \sum \frac{(r-1)^n z^{n+1}}{n!} = \sum \frac{(r-1)^{n-1} n z^n}{n!}$

Ответ:

$$a_n = n(r-1)^{n-1}$$

Функцией Эйлера $\phi(z)$ называется формальный степенной ряд вида

$$\phi(z) = \frac{\phi_1}{1^z} + \frac{\phi_2}{2^z} + \dots + \frac{\phi_n}{n^z} + \dots,$$

коэффициенты ϕ_n которой подсчитывают количество чисел $0 < d < n$, меньших n и взаимно-простых с ним. Доказать, что для любого $n \geq 0$ справедливо тождество

$$n = \sum_{d \mid n} \phi_d.$$

Доказательство Можно доказать индукцией по количеству простых множителей n , мы докажем по-другому. Для каждого числа от 1 до n рассмотрим его наибольший общий делитель с n . Посчитаем количество чисел, для которых НОД равен d . Мы знаем, что каждое из этих чисел, поделенное на d , взаимно просто с n/d и не больше n/d , и наоборот, если мы возьмем число, взаимно простое с n/d , и умножим его на d , мы получим число, у которого НОД с n равен d . Значит, таких чисел ровно ϕ_d . Сгруппировав их по $d \mid n$, получим доказываемую формулу (с заменой d на n/d).

Рассмотрим число $N_n(k)$ циклических последовательностей длины k над алфавитом из $n > 1$ букв. Если бы все буквы в любой такой последовательности были бы различны, то общее количество этих последовательностей было бы в k раз меньше количества n^k всех строк длины k над n -элементным алфавитом. Однако в данной задаче это условие не выполняется.

Пусть $M_n(d)$ есть количество циклических последовательностей длины d над алфавитом из $n > 1$ букв, переходящих в себя лишь при вращениях на углы, кратные 2π . Показать справедливость равенств

$$\sum_{d \mid k} M_n(d) = N_n(k) \quad \text{и} \quad \sum_{d \mid k} d M_n(d) = n^k.$$

Доказательство Рассмотрим все циклические последовательности длины k . У каждой такой последовательности есть минимальный период d , делящий k (если рассмотреть период минимальной длины, все остальные обязаны на него делиться, иначе остаток от деления — тоже период). Теперь поймем, что если мы рассмотрим (любую подряд идущую) подстроку длины d , то она не будет переходить в себя при любых поворотах меньше, чем на 2π (или, что то же самое, при поворотах меньше, чем на длину этой строки), иначе изначально можно было бы взять период меньше. То есть таких строк ровно $M_n(d)$, и из любой такой строки путем повторения k/d раз можно получить исходную циклическую. Таки образом мы доказали первое из равенств. Теперь рассмотрим какую-то циклическую строку длины k с минимальным периодом k . Сколькими способами мы можем ее записать в строку, а не по кругу? Для этого мы можем выбрать какой-то символ и записать строку, начиная с него. Заметим, что если у строки период d , то если мы сдвинем начало строки на что-то, кратное d , то результирующая нециклическая строка не изменится. При этом если есть два совпадающих способа с началами в i -ой и j -ой букве, и они совпадают, то $j - i$ должно делиться на период. Значит, для каждой циклической строки из $N_n(k)$ с периодом d (коих ровно $M_n(d)$) есть ровно d различных способов записать ее как нециклическую. Всего же нециклических строк длины k у нас n^k . Значит, мы доказали второе равенство.

Используя доказанные в предыдущем упражнении равенства, формулы (1) обращения Мебиуса, а также соотношение (2), получить следующие явные выражения для чисел $M_n(k)$ и $N_n(k)$:

$$M_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} \mu_d n^{k/d}, \quad N_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} \phi_d n^{k/d}.$$

Формула обращения Мебиуса:

$$b_n = \sum_{d \mid n} a_d \quad \implies \quad a_n = \sum_{d \mid n} \mu_d b_{n/d}. \quad (1)$$

Явная формула для функции Эйлера (можете доказать ее на дополнительный балл):

$$\phi_n = \sum_{d \mid n} \mu_d \frac{n}{d} = n \sum_{d \mid n} \frac{\mu_d}{d}. \quad (2)$$

Решение Применим формулу обращения ко второму равенству предыдущего задания:

$$M_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} \mu_d n^{k/d}$$

Подставим результат в полученную в предыдущем упражнении формулу для $N_n(k)$:

$$N_n(k) = \sum_{m \mid k} \frac{1}{m} \sum_{d \mid m} \mu_d n^{m/d} = \sum_{m \mid k} \frac{1}{m} \sum_{d \mid m} \mu_{m/d} n^d.$$

Поменяем теперь порядок суммирования:

$$\begin{aligned} N_n(k) &= \sum_{d \mid k} n^d \sum_{m \mid k, m=q \cdot d} \frac{1}{m} \mu_{m/d} = \sum_{d \mid k} n^d \sum_{q \mid (k/d)} \frac{1}{qd} \mu_q = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} n^d \frac{k}{d} \sum_{q \mid (k/d)} \frac{\mu_q}{q} = \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} n^d \phi_{k/d} = \frac{1}{k} \sum_{d \mid k} \phi_d n^{k/d}. \end{aligned}$$

Последовательностью Люка $U_n(p, q)$ называется последовательность, задающаяся рекуррентно следующим образом: $U_0(p, q) = 0$, $U_1(p, q) = 1$, $U_{n+2}(p, q) = pU_{n+1}(p, q) - qU_n(p, q)$. Найти, чему равно $U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2$.

Решение Докажем по индукции, что $U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = -q^{n-1}$. Доказывать будем индукцией по n .

База.

$$U_0 = 0, U_1 = 1, U_2 = pU_1 - qU_0 = p, U_3 = pU_2 - qU_1 = p^2 - q$$

$$U_2U_0 - U_1^2 = p \cdot 0 - 1 = -q^0. U_3U_1 - U_2^2 = p^2 - q - p^2 = -q^1$$

Переход.

$$U_{n+2}U_n - U_{n+1}^2 = (pU_{n+1} - qU_n)U_n - (pU_n - qU_{n-1})U_{n+1} = pU_{n+1}U_n - pU_{n+1}U_n + q(U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2) = -q^n$$

Найти производящие функции для последовательностей $\sin(\alpha n)$, $\cos(\alpha n)$.

Решение Вспомним, что $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum z^n \sin(\alpha n) &= \sum \frac{e^{i\alpha n} z^n - e^{-i\alpha n} z^n}{2i} = \frac{\sum (e^{i\alpha} z)^n - \sum e^{-i\alpha} z^n}{2i} = \frac{\frac{1}{1-e^{i\alpha}z} - \frac{1}{1-e^{-i\alpha}z}}{2i} = \\ &= \frac{z(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})}{2i} \frac{1}{1 - e^{i\alpha}z - e^{-i\alpha}z + z^2} = \frac{z \sin(\alpha)}{1 - 2 \cos(\alpha)z + z^2} \end{aligned}$$

Продemonстрируем другой способ на примере косинуса, для этого воспользуемся $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$

$$\begin{aligned} \sum z^n \cos(\alpha n) &= \sum \operatorname{Re}(e^{i\alpha n} z^n) = \operatorname{Re}(\sum e^{i\alpha n} z^n) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - e^{i\alpha}z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - z \cos(\alpha) - i z \sin(\alpha)}\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1 - z \cos(\alpha) + i z \sin(\alpha)}{(1 - z \cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha)}\right) = \frac{1 - z \cos(\alpha)}{1 - 2 \cos(\alpha)z + z^2} \end{aligned}$$

Составить рекуррентное соотношение для количества a_n способов замостить доску размером $3 \times n$ костяшками домино. Решить это рекуррентное соотношение с помощью обыкновенных производящих функций.

Просто хочу поделиться прекраснейшим решением этой задачи, которое можно прочитать в книге Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. "Конкретная математика. Основание информатики" на странице 352, которую можно найти, например, здесь http://edu.alnam.ru/book_c_math.php?id=51

Решите с помощью экспоненциальных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1} &= 4na_n + 2a_n, & a_0 &= 1; \\ a_n &= na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2}, & a_0 = a_1 &= 1.\end{aligned}$$

Решение Решение второго пункта:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2} a_n \cdot \frac{z^n}{n!} &= z \sum_{n=2} a_{n-1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + z^2 \sum_{n=2} a_{n-2} \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}. \\ A(z) - z - 1 &= z(A(z) - 1) + z^2 \\ A(z)(1 - z - z^2) &= 1 \\ A(z) &= \frac{1}{1 - z - z^2} \\ A(z) &= \sum z^n F_{n+1} = \sum \frac{z^n}{n!} (F_{n+1} n!) \\ a_n &= F_{n+1} n!\end{aligned}$$

где F_n — числа Фибоначчи.

С первым пунктом я ошибся, и его решение через экспоненциальные функции слишком сложно (если в полученном дифференциальном уравнении $zA''(z) + (1-4z)A'(z) - 2A(z) = 0$ сделать замену $A(z) = e^{2z}B$, $z = t/(2i)$, то получится дифференциальное уравнение Бесселя, для решения которого известно разложение в ряд Тейлора, но это не повод решать задачу таким способом). **Если вы решили задачу любым другим способом, я его зачту**, и приведу здесь решение через просто производящие функции:

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1}z^n &= 4na_nz^n + 2a_nz^n \\ \sum a_{n+1}(z^{n+1})' &= 4z \sum a_n(z^n)' + 2 \sum a_nz^n \\ A' &= 4zA' + 2A \\ \frac{A'}{A} &= \frac{2}{1-4z} \\ (\ln(A))' &= \frac{2}{-4}(\ln(1-4z))' \\ \ln(A) &= \frac{-1}{2} \ln(1-4z) + const \\ A &= (1-4z)^{-1/2} \cdot const, A(0) = 1 \\ A &= (1-4z)^{-1/2}\end{aligned}$$

А отсюда мы знаем, что $a_n = \binom{2n}{n}$ (что, впрочем, очевидно из рекуррентного соотношения $a_{n+1} = 2\frac{2n+1}{n+1}a_n = \dots = 2^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} a_0 = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$