Производящие функции и рекуррентные соотношения

1 Производящие функции и формальные степенные ряды

1.1. Понятие производящей функции является, пожалуй, самым важным понятием современной перечислительной комбинаторики. Основная задача данного параграфа состоит в том, чтобы объяснить комбинаторный смысл производящей функции, а также дать по возможности строгое ее определение.

1.1.1. Пусть вначале X есть некоторое *конечное* множество. Первое, что обычно нам хочется сделать — это указать мощность этого множества, то есть подсчитать количество всех элементов в нем. Однако, как правило, нам этой информации оказывается недостаточно — на следующем этапе мы обычно хотим как-то классифицировать элементы этого множества X, то есть разбить множество на блоки, объединенные по тому или иному признаку.

Пример 1.1. Рассмотрим множество всех товаров на складе. Конечно, может быть кому-то и полезно знать общее количество N единиц хранимых на складе товаров. Однако любой кладовщик вам скажет, что значительно полезнее иметь информацию о количестве единиц товара каждой категории в отдельности — например, о количестве бутылок вина, коробок с мылом, пакетов с чаем. При таком подходе мы, конечно же, знаем и общее число N товаров — для его получения нам достаточно сложить количества товаров каждой категории.

Пример 1.2. Как мы уже знаем, общее количество подмножеств n-элементного множества X равно 2^n. Однако, как правило, нас интересует более подробная информация об этих подмножествах, например, сколько существует подмножеств, содержащих ровно k элементов. Число таких подмножеств равно, по определению, биномиальному коэффициенту $\binom{n}{k}$, а суммирование этих коэффициентов по всем $k = 0, \dots, n$ дает нам 2^n.

1.1.2. Рассмотрим теперь *счетное* множество X, например, множество всех графов. Здесь вообще ставить вопрос о количестве всех объектов данного множества бессмысленно. Однако и в этом случае задачу перечисления можно сделать вполне содержательной, и сделать это можно с помощью того же подхода. Именно, можно разбить множество X на конечные блоки по тому или иному признаку, и перечислять количество элементов в каждом конкретном блоке.

Например, бессмысленно перечислять все звезды во Вселенной. Однако перечислить все звезды в данной галактике — вполне разумная задача. Далее, столь же бессмысленно перечислять все графы. Однако перечисление всех различных графов на n вершинах при заданном n есть также вполне содержательная и важная с практической точки зрения задача.

1.1.3. Заметим также, что именно этот принцип, а именно, принцип разбиения множества перечисляемых нами элементов на блоки с дальнейшим подсчетом элементов в каждом отдельном блоке, мы, по сути, использовали для получения всех основных формул элементарной комбинаторики. Если при этом количество перечисляемых объектов в данном множестве выражалось через количество тех же самых объектов, но в меньших множествах, то мы на выходе получали некоторое рекуррентное соотношение, позволяющее определить количество перечисляемых объектов.

1.1.4. Оказывается, существует очень полезный способ разбиения множества на блоки, который, собственно, и приводит к понятию производящей функции. Именно, припишем всем элементам x рассматриваемого множества X некоторый вес $w(x)$ так, чтобы этот вес совпадал на всех элементах одного и того же блока. Формально сделать это можно с помощью отображения

$$w\,:\,X\;\longrightarrow\;K$$

множества X в некоторое коммутативное кольцо K, сопоставляющего всем элементам x данного блока B_k одно и то же значение $w(x)=k$, $k\in K$:

$$B_k=\{x\mid w(x)=k\},\qquad X=\bigcup_{k\in K}B_k=\bigcup_{k\in K}\{x\mid w(x)=k\}.$$

Заметим, что при таком подходе всему множеству X в кольце K отвечает вполне конкретный элемент

$$\sum_{x\in X}w(x)=\sum_{k\in K}c_k\cdot k,\qquad\qquad c_k=|w^{-1}(k)|=|B_k|\,,$$

называемый *энумератором* множества X.

Пример 1.3. Пусть на складе имеются три пакета с чаем, две бутылки вина и четыре коробки с мылом:

$$X=\big\{\text{чай}_1,\text{чай}_2,\text{чай}_3,\text{вино}_1,\text{вино}_2,\text{мыло}_1,\text{мыло}_2,\text{мыло}_3,\text{мыло}_4\big\}.$$

Рассмотрим теперь отображение w этого множества X в коммутативное кольцо K (то есть кольцо, в котором операция умножения коммутативна и ассоциативна; как правило, считают, что это кольцо с единицей, то есть в нем существует нейтральный элемент относительно операции умножения) над множеством, содержащим элементы $\{\text{ч},\text{в},\text{м}\}$, задаваемое равенствами

$$w(\text{чай}_i)=\text{ч},\qquad w(\text{вино}_i)=\text{в},\qquad w(\text{мыло}_i)=\text{м}.$$

Тогда все множество X разобьется на три блока, а энумератор этого множества примет вид

$$w(X)=3\text{ч}+2\text{в}+4\text{м}.$$

Пример 1.4. Рассмотрим множество 2^X всех подмножеств n-элементного множества X, а также коммутативное кольцо K над множеством, содержащим элементы x и y. Сопоставим любому элементу $Y\subset X$ множества 2^X вес $w=x^ky^{n-k}$, где k есть мощность подмножества Y. Отображение $w:2^X\to K$ разобъет множество 2^X на блоки B_k мощности $c_k=\binom{n}{k}$. При этом самому множеству 2^X в кольце K будет соответствовать энумератор вида

$$w(2^X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=(x+y)^n.\tag{1}$$

1.1.5. Как правило, в перечислительной комбинаторике при построении отображения $w:X\to K$ используют несколько стандартных колец. Именно, рассмотрим множество $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}$ всех счетных последовательностей $(a_0,a_1,a_2,\ldots)$ комплексных чисел:

$$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}:=\big\{(a_0,a_1,a_2,\ldots)\,|\,a_i\in\mathbb{C}\quad\forall\,i\in\mathbb{Z}_+\big\}.$$

Введем на этом множестве две базовые операции — сложения и умножения. Операция сложения числовых последовательностей определяется обычно как операция поэлементного сложения:

$$(a_0,a_1,a_2,\ldots)+(b_0,b_1,b_2,\ldots)=(a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots).\tag{2}$$

Операцию же умножения

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \ldots) = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$$

можно вводить по-разному. Чаще всего на практике используются следующие два способа умножения этих последовательностей: свертка

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i} \tag{3}$$

и биномиальная свертка

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a_i \cdot b_{n-i} \tag{4}$$

числовых последовательностей. В обоих случаях множество $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}$ с введенными на нем операциями представляет собой коммутативное кольцо (точнее, коммутативную область целостности, то есть кольцо, в котором произведение ненулевых элементов кольца отлично от нуля).

1.1.6. На практике с такими кольцами удобно работать как с кольцами $\mathbb{C}[[z]]$ и $\mathbb{C}_e[[z]]$ формальных степенных рядов. В таких кольцах для элемента $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ вводится специальное обозначение

$$(0, 1, 0, 0, \ldots) =: z.$$

Рассмотрим вначале случай кольца $\mathbb{C}[[z]]$ с правилом умножения (3). Заметим, что

$$z^2 := z \cdot z = (0, 1, 0, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, 0, \ldots) = (0 \cdot 0, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0, \ldots) = (0, 0, 1, 0, \ldots),$$

$$\begin{gathered} z^3 := z \cdot z \cdot z = (0, 1, 0, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, 0, \ldots) = (0, 1, 0, 0, \ldots) \cdot (0, 0, 1, 0, \ldots) = \\ = (0 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0, \ldots) = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots), \end{gathered}$$

В общем случае, как несложно проверить по индукции,

$$z^n := \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots),$$

где единица в последнем выражении стоит на n-й позиции, $n = 0, 1, \ldots$. Как следствие, любую последовательность чисел $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ можно записать в виде формального степенного ряда

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n =: a(z) \in \mathbb{C}[[z]].$$

Аналогично, в случае кольца $\mathbb{C}_e[[z]]$ с правилом умножения (4) несложно убедиться в том, что

$$z^n := \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n} = (0, \ldots, 0, n!, 0, \ldots),$$

причем единственное ненулевое число $n!$ стоит в этой последовательности на n-м месте. Поэтому в кольце $\mathbb{C}_e[[z]]$ любая последовательность чисел $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ может быть записана так:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{z^n}{n!} =: A(z) \in \mathbb{C}_e[[z]].$$

1.1.7. Вернемся теперь к перечисляемому нами множеству X и рассмотрим отображение

$$w : X \longrightarrow \mathbb{C}[[z]],$$

которое любому элементу $x \in X$ сопоставляет некоторый формальный степенной ряд вида

$$w(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot z + \ldots + 0 \cdot z^{k-1} + 1 \cdot z^k + 0 \cdot z^{k+1} + \ldots = z^k.$$

По сути дела, при таком подходе вес любого элемента $x \in X$ определяется степенью $k \in \mathbb{Z}_+$ особого элемента z кольца $\mathbb{C}[[z]]$. Тогда суммирование образов $w(x)$ этого отображения по всем $x \in X$ даст нам энумератор вида

$$f(z) := \sum_{x \in X} w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

то есть формальный степенной ряд, коэффициенты c_n которого дают нам количество элементов $x \in X$, имеющих заданный вес $z^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Этот энумератор и называют *обыкновенной производящей функцией* множества X.

Аналогично, рассматривая отображение

$$w_e : X \longrightarrow \mathbb{C}_e[[z]],$$

сопоставляющее любому элементу $x \in X$ формальный степенной ряд вида

$$w(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{z}{1!} + \ldots + 0 \cdot \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} + 1 \cdot \frac{z^k}{k!} + 0 \cdot \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots = \frac{z^k}{k!},$$

мы получаем в качестве энумератора X формальный степенной ряд

$$F(z) := \sum_{x \in X} w_e(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{z^n}{n!},$$

называемый *экспоненциальной производящей функцией* множества X.

1.1.8. Согласно определению, каждая производящая функция является элементом кольца формальных степенных рядов. Следовательно, любую пару производящих функций можно складывать и перемножать между собой.

Формальные правила сложения и умножения этих функций, естественно, совпадают с описанными выше правилами (2)–(4) сложения и умножения отвечающих этим рядам числовых последовательностей. Именно, пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad \text{и} \qquad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

есть пара обыкновенных производящих функций для множеств X и Y соответственно, а

$$F(z) = a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots \qquad \text{и} \qquad G(z) = b_0 + b_1 \frac{z}{1!} + b_2 \frac{z^2}{2!}$$

есть пара экспоненциальных производящих функций для этой пары множеств. Тогда суммой этих производящих функций называются формальные степенные ряды

$$f(z) + g(z) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) z + (a_2 + b_2) z^2 + \ldots$$

и

$$F(z) + G(z) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\frac{z}{1!} + (a_2 + b_2)\frac{z^2}{2!} + \dots$$

Произведением производящих функций называются формальные степенные ряды

$$h(z) = f(z) \cdot g(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \qquad \text{и} \qquad H(z) = F(z) \cdot G(z) := c_0 + c_1\frac{z}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \dots,$$

коэффициенты c_n которых вычисляются по формулам (3) и (4) соответственно.

Важно, что сложение и умножение любых двух производящих функций имеет и вполне определенный комбинаторный смысл. Выяснение этого смысла мы отложим до одного из следующих параграфов. Сейчас же, на время забыв о перечисляемом множестве X, займемся изучением свойств производящих функций с точки зрения теории формальных степенных рядов.

1.2. Итак, по определению, обыкновенная и экспоненциальная производящие функции являются элементами формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z]]$ и $\mathbb{C}_e[[z]]$. Поговорим немного подробнее о таких формальных степенных рядах.

1.2.1. Прежде всего, подчеркнем отличие формальных степенных рядов от рядов, встречающихся в математическом анализе. По сути дела, любой формальный степенной ряд — это некоторая картинка, удобная для изображения заданной числовой последовательности $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Например, рассмотрим формальный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + 24z^4 + \dots, \tag{5}$$

отвечающий числовой последовательности $(1, 1, 2, 6, 24, \dots)$. Символы $1, z, z^2, z^3, \dots$ в такой форме записи играют, по сути, роль индексов — они нужны лишь для того, чтобы указывать позиции, на которых стоят элементы этой числовой последовательности. Например, если коэффициент при z^4 равен 24, то это означает лишь, что число 24 есть четвертый элемент рассматриваемой числовой последовательности.

Как следствие, в теории формальных степенных рядов символ z не надо рассматривать как комплексную переменную, которая может принимать какие-то конкретные значения. Нет смысла вычислять значения таких рядов как предел последовательности частичных сумм ни при каких конкретных значениях z. Наконец, в этой теории можно обойтись без понятия сходящихся или расходящихся рядов.

Так, например, с точки зрения математического анализа рассматривать ряд (5) смысла не имеет — он расходится при всех значениях $z > 0$. В комбинаторике же этот ряд, понимаемый как обыкновенная производящая функция, имеет вполне конкрентый и весьма важный комбинаторный смысл: коэффициенты этого ряда задают количество всех перестановок заданного n-элементного множества.

1.2.2. Несмотря на все вышесказанное, опыт, накопленный при работе с рядами из математического анализа, часто бывает полезен и при анализе формальных степенных рядов. Связано это, прежде всего, с тем, что многие базовые операции над рядами, такие, как сложение или умножение, вводятся одинаково как для обычных, так и для формальных степенных рядов.

Пример 1.5. Перемножим два формальных степенных ряда из $\mathbb{C}[[z]]$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^n \qquad \text{и} \qquad g(z) = 1 - \alpha z.$$

Коэффициент c_0 в произведении $h(z) = f(z) \cdot g(z)$, очевидно, равен $\alpha^0 \cdot 1 = 1$. Несложно убедиться, что остальные коэффициенты c_k равны нулю:

$$c_k = \alpha^k \cdot 1 - \alpha \cdot \alpha^{k-1} \equiv 0.$$

Следовательно,

$$f(z) \cdot g(z) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^n\Big) \cdot (1-\alpha z) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^n = g^{-1}(z) = (1-\alpha z)^{-1} =: \frac{1}{1-\alpha z}.$$

Заметим теперь, что формула

$$1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \ldots = \frac{1}{1-\alpha z} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C} \tag{6}$$

есть хорошо известная формула для суммы геометрической прогрессии. В математическом анализе смысл этой формулы состоит в следующем: ряд, стоящий в левой ее части, сходится к функции, стоящей в ее правой части, при всех z, таких, что $|\alpha z| < 1$. В теории формальных степенных рядов ее смысл другой: формула означает, что функции $f(z)$ и $g(z)$ являются взаимно-обратными по отношению к операции умножения в кольце $\mathbb{C}[[z]]$ формальных степенных рядов. Однако, несмотря на смысловые отличия, вид самого тождества и в том, и в другом случае одинаков.

1.2.3. Сформулированное выше наблюдение можно использовать для получения различных соотношений, связывающих элементы кольца формальных степенных рядов. Именно, пусть у нас имеются две функции $f(z)$ и $g(z)$ комплексного аргумента, аналитические в некоторой общей для них окрестности точки $z = 0$. Предположим, что в этой окрестности функции удовлетворяют какому-то общему для них соотношению. Представим эти функции в форме сходящихся степенных рядов. Тогда высока вероятность того, что указанное выше соотношение будет справедливым и как некоторое соотношение между формальными степенными рядами, то есть как некоторое соотношение, справедливое для некоторых двух элементов кольца формальных степенных рядов.

С этой точки зрения доказанное в примере 1.5 тождество (6) может быть получено так. Рассмотрим функции комплексного аргумента

$$f(z) = \frac{1}{1-\alpha z} \qquad \text{и} \qquad g(z) = 1 - \alpha z,$$

аналитические в области $|\alpha z| < 1$. Последнее, в частности, означает, что эти функции в области $|\alpha z| < 1$ единственным образом представляются своими рядами Тейлора

$$f(z) = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \ldots \qquad \text{и} \qquad g(z) = 1 - \alpha z + 0z^2 + \ldots.$$

Кроме того, в этой области для них справедливо очевидное равенство $f(z) \cdot g(z) = 1$, которое в терминах соответствующих им рядов записывается так:

$$f(z) \cdot g(z) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^n\Big) \cdot (1 - \alpha z) = 1. \tag{7}$$

Все, что теперь остается проверить — это то, что данное равенство останется справедливым, если его рассматривать и как некоторое тождество между формальными степенными рядами в $\mathbb{C}[[z]]$.

Рассмотрим еще несколько примеров из этой же серии.

Пример 1.6. Рассмотрим функции $F(z) = \exp(z)$ и $G(z) = \exp(-z)$, аналитические на всей комплексной плоскости. Очевидное равенство $F(z) \cdot G(z) = 1$ в терминах соответствующих им рядов Тейлора выглядит так:

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot \frac{z^n}{n!}\Bigr) \cdot \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1) \cdot \frac{z^n}{n!}\Bigr) = 1.$$

Несложно убедиться, что это равенство оказывается справедливым и как соотношение между двумя элементами кольца $\mathbb{C}_e[[z]]$. Применяя теперь правило (4) умножения в кольце $\mathbb{C}_e[[z]]$, получаем хорошо известное и очень полезное тождество для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & \text{если } n > 0, \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

Пример 1.7. Пусть $F(z)$, $G(z)$ – пара аналитических функций, связанных в некоторой общей для них окрестности точки $z = 0$ тождеством вида

$$F(z) = G(z) \cdot e^z.$$

Очевидно, что тогда

$$G(z) = F(z) \cdot e^{-z}.$$

На языке формальных степенных рядов $F(z), G(z) \in \mathbb{C}_e[[z]]$ эти равенства отвечают формулам обращения

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k.$$

Замечание 1.8. Подводя итоги, можно сказать, что описанный выше способ есть хороший способ *получения* разного рода соотношений между формальными степенными рядами. При этом, вообще говоря, это не есть способ их *доказательства* — по идее, мы обязательно должны затем проверить справедливость любого такого тождества, используя только лишь определение операций над формальными степенными рядами в соответствующем кольце формальных степенных рядов. Однако в случае, когда в полученных соотношениях фигурируют только лишь операции сложения и умножения, мы можем сразу сказать, что эти соотношения верны и как соотношения между формальными степенными рядами. Действительно, справедливость таких соотношений сразу следует из того факта, что операции сложения и умножения определены одинаково как в математическом анализе, так и в теории формальных степенных рядов.

1.3. Как уже неоднократно отмечалось, формула (7) указывает на то, что функции $f(z)$ и $g(z)$ являются взаимно-обратными по отношению к операции умножения в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z]]$. Возникает вопрос: какими свойствами должна обладать функция $g(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ для того, чтобы она имела обратный по отношению к операции умножения элемент в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z]]$? Оказывается, необходимым и достаточным условием для этого является отличие коэффициента b_0 при $z^0 = 1$ от нуля.

1.3.1. Действительно, пусть $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ и коэффициент $b_0 \neq 0$. Покажем, что в этом случае обязательно существует функция $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, такая, что $f(z) \cdot g(z) = 1$.

Для этого перемножим два формальных степенных ряда $f(z)$ и $g(z)$, а затем приравняем в равенстве $f(z)\cdot g(z) = 1$ коэффициенты при одинаковых степенях z:

$$\begin{array}{lll}
z^0: & a_0\cdot b_0 = 1 & \Longrightarrow \quad a_0 = \dfrac{1}{b_0} \neq 0; \\
z^1: & a_0\cdot b_1 + a_1\cdot b_0 = 0 & \Longrightarrow \quad a_1 = -\dfrac{1}{b_0}\cdot(a_0\,b_1); \\
z^2: & a_0\cdot b_2 + a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_0 = 0 & \Longrightarrow \quad a_2 = -\dfrac{1}{b_0}\cdot(a_0\,b_2 + a_1\,b_1); \\
 & & \qquad\qquad \ldots
\end{array}$$

Видно, что таким образом шаг за шагом можно восстановить все коэффициенты a_n формального степенного ряда $f(z)$.

Обратно, пусть $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ и $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ — обыкновенные производящие функции, такие, что $f(z)\cdot g(z) = 1$. Тогда, согласно формуле умножения обыкновенных производящих функций, $a_0\cdot b_0 = 1$. Отсюда, в частности, следует, что $b_0 \neq 0$.

1.3.2. Пусть теперь $h(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ и $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ — два произвольных элемента кольца $\mathbb{C}[[z]]$, причем $b_0 \neq 0$. Пусть для определенности $b_0 = 1$. В этом случае можно рассматривать формальные дроби вида $h(z)/g(z)$ как элементы $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, такие, что $f(z)\cdot g(z) = h(z)$. Говорят, что все эти элементы $f(z)$ образуют *поле частных* кольца $\mathbb{C}[[z]]$. По сути же дела, их можно рассматривать как результат *деления* формального степенного ряда $h(z)$ на формальный степенной ряд $g(z)$. Так, в рассмотренном в примере 1.5 ряд

$$f(z) = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \ldots$$

можно рассматривать как результат деления формальных степенных рядов $h(z) = 1$ и $g(z) = 1 - \alpha z$.

1.3.3. В качестве еще одного чрезвычайно полезного для дальнейшего изложения примера приведем следующее обобщение формулы (6):

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) (\alpha\, z)^n. \tag{8}$$

Для проверки этой формулы следует, вообще говоря, показать, что умножение стоящего в правой части равенства (8) ряда $f(z)$ на ряд $g(z) = (1-\alpha z)^k$ дает единицу для любого $k \in \mathbb{N}$. Однако проще всего доказать эту формулу, воспользовавшись отмеченной выше связью между формальными степенными рядами и аналитическими функциями комплексного аргумента.

Действительно, рассмотрим пару функций

$$f(z) = \frac{1}{(1-\alpha z)^k} \qquad \text{и} \qquad g(z) = (1-\alpha z)^k$$

комплексного аргумента z, аналитических в общей для них области $|\alpha z| < 1$. Ясно, что в этой области справедливо равенство

$$f(z)\cdot g(z) = 1.$$

Все, что теперь осталось для доказательства тождества (8) — это разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в области $|\alpha z| < 1$.

Для этого вспомним хорошо известную из курса математического анализа формулу бинома Ньютона

$$(1+z)^q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(q)_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-n+1)}{n\,(n-1)\,\ldots\,1} z^n, \tag{9}$$

справедливую для любого $q \in \mathbb{C}$ и $|z| < 1$. Полагая в (9) в качестве $q = -k$, $k \in \mathbb{N}$, и заменяя в ней z на αz, получаем следующую цепочку равенств, приводящую к формуле (8):

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^k} = (1-\alpha z)^{-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-k)_n}{n!} (-\alpha\, z)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-k)\,(-k-1)\,\ldots\,(-k-(n-1))}{n\,(n-1)\,\ldots\,1} (-1)^n (\alpha\, z)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n} (\alpha\, z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) (\alpha\, z)^n.$$

В частном случае $k = 2$ и $k = 3$ из (8) имеем следующие полезные формулы:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^2} = 1 + 2\,\alpha\, z + 3\,\alpha^2 z^2 + 4\,\alpha^3 z^3 + \ldots + (n+1)\alpha^n z^n + \ldots, \tag{10}$$

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^3} = 1 + 3\,\alpha\, z + 6\,\alpha^2 z^2 + 10\,\alpha^3 z^3 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \alpha^n z^n + \ldots. \tag{11}$$

1.3.4. В заключение заметим, что все рассуждения, связанные с делением формальных степенных рядов из кольца $\mathbb{C}[[z]]$, легко переносятся и на элементы кольца $\mathbb{C}_e[[z]]$. В частности, формальный степенной ряд $G(z) = b_0 + b_1 z/1! + b_2 z^2/2! + \ldots$ имеет обратный по отношению к операции умножения в $\mathbb{C}_e[[z]]$, если $b_0 \neq 0$.

2 Производящие функции Дирихле. Формулы обращения Мебиуса

2.1. Как уже отмечалось выше, существует достаточно большое количество различных правил умножения числовых последовательностей, из которых (3) и (4) лишь самые популярные. Так, например, в комбинаторных задачах, связанных с циклическими последовательностями, а также в аналитической теории чисел очень часто используется еще одно правило умножения — так называемая свертка Дирихле.

2.1.1. Именно, пусть

$$(a_1, a_2, \ldots) \qquad \text{и} \qquad (b_1, b_2, \ldots)$$

есть пара числовых последовательностей. Их сверткой Дирихле называется числовая последовательность $(c_1, c_2, \ldots)$, коэффициенты c_n которой рассчитываются по формулам

$$c_n = \sum_{d \backslash n} a_d b_{n/d}. \tag{12}$$

Суммирование в этой формуле происходит по всем делителям d целого положительного числа n, то есть по всем таким положительным числам d, для которых существует $k \in \mathbb{Z}$, такое, что выполняется равенство $n = k \cdot d$. Множество $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ числовых последовательностей $(a_1, a_2, \ldots)$ с введенными на нем операциями сложения (2) и умножения (12) образует коммутативное кольцо.

2.1.2. Поставим в соответствие числовой последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ формальный степенной ряд вида

$$f(z) = \frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} + \frac{a_3}{3^z} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^z}, \tag{13}$$

называемый *рядом Дирихле* числовой последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$. С точки зрения математического анализа этот ряд в области $\Re z > \sigma$ задает некоторую аналитическую функцию $f(z)$ комплексного аргумента $z \in \mathbb{C}$. Несложно показать (см.упражнение **??**), что коэффициенты c_n у получающейся в результате перемножения двух таких функций

$$f(z) = \frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} + \frac{a_3}{3^z} + \ldots \qquad \text{и} \qquad g(z) = \frac{b_1}{1^z} + \frac{b_2}{2^z} + \frac{b_3}{3^z} + \ldots$$

функции $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{c_n}{n^z}$ рассчитываются по формулам (12).

Как следствие, ряд вида (13) можно рассматривать как элемент кольца $\mathbb{C}_d[[z]]$ формальных степенный рядов, операции сложения и умножения в котором определяются формулами (2) и (12) соответственно. Нейтральным элементом по умножению в этом кольце является функция $I(z) = 1/1^z = 1$, отвечающая числовой последовательности

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1, \end{cases}$$

а любой элемент кольца $f(z) \in \mathbb{C}_d[[z]]$ с ненулевым свободным членом $a_1 \neq 0$ обратим по умножению.

2.1.3. Рассмотрим числовую последовательность $(1, 1, 1, \ldots)$. В кольце $\mathbb{C}_d[[z]]$ такой последовательности отвечает формальный степенной ряд вида

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots,$$

известный как *ζ-функция Римана.* Ее аналогами в кольцах $\mathbb{C}[[z]]$ и $\mathbb{C}_e[[z]]$ являются функции $f(z) = 1/(1-z)$ и $F(z) = e^z$ соответственно.

2.1.4. Функцией Мебиуса $\mu(z)$ называется функция, обратная к ζ-функции по отношению к операции умножения в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{C}_d[[z]]$. Это означает, что

$$\mu(z) \cdot \zeta(z) = \zeta(z) \cdot \mu(z) = I(z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{d \backslash n} \mu_d = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

В упражнении **??** предлагается доказать, что коэффициенты μ_n этой функции рассчитываются по формулам

$$\mu_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ (-1)^s, & \text{если в каноническом разложении } n \text{ на простые множители } n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} \\ & \text{все показатели } \alpha_i = 1, \\ 0, & \text{если в этом разложении существует хотя бы одно } \alpha_i > 1. \end{cases} \tag{14}$$

Так, например,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
μ_n	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1

2.1.5. Из определения функций $\zeta(z)$ и $\mu(z)$ следует, что если функции $f(z), g(z) \in \mathbb{C}_d[[z]]$ связаны равенством

$$g(z) = \zeta(z) \cdot f(z), \qquad \text{то} \qquad f(z) = \mu(z) \cdot g(z).$$

Этим равенствам отвечают следующие *формулы обращения Мебиуса:*

$$b_n = \sum_{d \backslash n} a_d \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \sum_{d \backslash n} \mu_d \, b_{n/d}. \tag{15}$$

3 Производящие функции и линейные рекуррентные соотношения

3.1. В параграфе, посвященном биномиальным коэффициентам, мы уже видели, как можно эффективно использовать энумератор (1) для получения разного рода соотношений между биномиальными коэффициентами. В следующем параграфе мы продемонстрируем эффективность использования формальных степенных рядов при решении рекуррентных соотношений.

3.2. Ранее мы научились по заданному линейному однородному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами, связывающему члены a_n числовой последовательности, находить явные выражения для коэффициентов a_n как функций параметра n. Используя эти выражения, мы можем, в принципе, записать решение и в виде формального степенного ряда

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Однако в большинстве задач такой порядок построения решения не является оптимальным. На практике, как правило, легче по имеющемуся рекуррентному соотношению построить соответствующую данной комбинаторной задаче производящую функцию, используя описанные в предыдущем параграфе операции над формальными степенными рядами. Проиллюстрируем вышесказанное на простом примере, описывающем изменение популяций лягушек в озере.

3.2.1. Напомним, что для этого примера нами было получено следующее линейное неоднородное рекуррентное соотношение первого порядка, описывающее изменение популяции лягушек в озере:

$$a_{n+1} = 4\,a_n - 100, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad a_0 = 50. \tag{16}$$

Покажем, как восстановить для этой рекуррентной числовой последовательности отвечающую ей обыкновенную производящую функцию.

Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

есть искомая обыкновенная производящая функция для числовой последовательности a_n, удовлетворяющей уравнению (16). Домножим (16) на z^{n+1} и просуммируем полученное уравнение по n от 0 до $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\, z^{n+1} = 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^{n+1} - 100\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1}. \tag{17}$$

Левая часть этого равенства — это “почти” $f(z)$; переходя в этой сумме к новому индексу суммирования $k = n+1$, $k = 1, \ldots, +\infty$, получаем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, z^k = f(z) - a_0.$$

Первая сумма в правой части равенства (17), очевидно, равна

$$4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^{n+1} = 4\, z\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n = 4\, z\, f(z).$$

Наконец, последнюю сумму в (17) можно свернуть и записать в виде дроби

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Поэтому окончательно равенство (17) переписывается в виде

$$f(z) - a_0 = 4\, z\, f(z) - 100\frac{z}{1-z} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad f(z) = \frac{a_0}{1-4z} - \frac{100\, z}{(1-z)(1-4z)}. \tag{18}$$

3.2.2. Итак, мы построили производящую функцию для числовой последовательности a_n. Наша же исходная задача заключалась в отыскании явного выражения для этих чисел. Оказывается, что теперь это сделать довольно просто — достаточно разложить правую часть (18) в ряд по степеням z.

С первым слагаемым в правой части (18) справиться легко — мы знаем, что

$$g(z) = \frac{1}{1-4z} = 1 + 4z + (4z)^2 + \ldots.$$

Для того, чтобы проделать ту же операцию со вторым слагаемым, нам предварительно необходимо разложить эту дробь на простейшие:

$$\frac{z}{(1-z)(1-4z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-4z} = \frac{A - 4Az + B - Bz}{(1-z)(1-4z)} \Longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + B = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -1/3 \\ B = 1/3 \end{cases}$$

Как следствие,

$$-\frac{100\, z}{(1-z)(1-4z)} = -\frac{100}{3}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} (4^n - 1)\, z^n\right],$$

и мы окончательно для a_n получаем следующее явное аналитическое выражение:

$$a_n = a_0\, 4^n - \frac{100}{3}\left[4^n - 1\right] = \frac{50}{3}\,\left[4^n + 2\right], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

3.3. Опишем теперь общий алгоритм использования аппарата обыкновенных производящих функций для решения линейных рекуррентных соотношений m-го порядка с постоянными коэффициентами:

(1) ввести обыкновенную производящую функцию $f(z)$ для числовой последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$;
(2) трансформировать заданное рекуррентное соотношение в уравнение для $f(z)$, домножив это соотношение на z^{n+m}, просуммировав полученное выражение по n от 0 до $+\infty$ и выразив каждую из полученных таким образом сумм через $f(z)$;
(3) разрешить полученное уравнение относительно $f(z)$;
(4) определить числа a_n как коэффициенты при z^n в разложении $f(z)$ по степеням z.

Применим этот алгоритм к линейному неоднородному рекуррентному соотношению m-го порядка с постоянными коэффициентами, записанному в следующем виде:

$$b_0 a_{n+m} + b_1 a_{n+m-1} + \ldots + b_m a_n = u_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_0 \neq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} - \text{заданы}. \quad (19)$$

3.3.1. На первом шаге введем для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ обыкновенную производящую функцию

$$f(z) = a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Домножим (19) на z^{n+m} и просуммируем полученное уравнение по n от 0 до $+\infty$. В полученном соотношении разберем каждое слагаемое отдельно:

$$b_0 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m} z^{n+m} = b_0\, [f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{m-1} z^{m-1}],$$

$$b_1 z \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m-1} z^{n+m-1} = b_1 z\, [f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{m-2} z^{m-2}],$$

$$\ldots$$

$$b_{m-2} z^{m-2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^{n+2} = b_{m-2} z^{m-2}\, [f(z) - a_0 - a_1 z],$$

$$b_{m-1} z^{m-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} z^{n+1} = b_{m-1} z^{m-1}\, [f(z) - a_0],$$

$$b_m z^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = b_m z^m f(z),$$

$$z^m \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n =: z^m u(z).$$

Введем также следующие обозначения:

$$g(z) := b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m,$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \qquad h(z) := \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^n.$$

С учетом этих обозначений и сделанных выше преобразований получается следующее уравнение на производящую функцию $f(z)$:

$$f(z)\cdot g(z) = b_0a_0+(b_0a_1+b_1a_0)z+\ldots+(b_0a_{n+m-1}+b_1a_{n+m-2}+\ldots+b_{m-2}a_1+b_{m-1}a_0)z^{m-1}+z^m u(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^n + z^m u(z) = h(z) + z^m u(z) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad f(z) = \frac{h(z)+z^m u(z)}{g(z)}.$$

Заметим, что деление на $g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m$ законно — коэффициент b_0 отличен от нуля.

3.3.2. В случае *однородного* линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами m-го порядка производящая функция для рекуррентной последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ представляет собой рациональную функцию

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{m-1} c_n z^n}{\sum\limits_{n=0}^{m} b_n z^n}.$$

По сути, этим устанавливается взаимно-однозначное соответствие между линейными однородными рекуррентными соотношениями на коэффициенты a_n и рациональными производящими функциями.

3.3.3. Как правило, при вычислении явного вида коэффициентов a_n вместо формального деления степенных рядов целесообразно разложить дробь на простейшие — элементарные дроби вида

$$\frac{A}{1-\alpha\, z}, \qquad \frac{B}{(1-\alpha\, z)^2}, \qquad \ldots \qquad \frac{D}{(1-\alpha\, z)^m},$$

а затем воспользоваться готовыми формулами вида (8).

3.4. Перейдем теперь к решению линейных рекуррентных соотношений с переменными коэффициентами.

3.4.1. Как вскоре мы увидим, при решении таких уравнений с помощью производящих функций естественным образом возникают производные таких функций. Однако производящая функция — это формальный степенной ряд, поэтому понятие производной для такой функции требует специального определения.

Определение 3.1. Пусть $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ — некоторая числовая последовательность, и пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

есть формальный степенной ряд для этой последовательности, понимаемый как элемент кольца $\mathbb{C}[[z]]$. Производной ряда $f(z)$ называется формальный степенной ряд вида

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n z^{n-1} := f'(z).$$

Иными словами, производной числовой последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ в кольце с операцией умножения (3) называется числовая последовательность

$$(1 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, 3 \cdot a_3, \ldots).$$

Определение 3.2. Пусть

$$F(z) = a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots \in \mathbb{C}_e[[z]]$$

есть формальный степенной ряд для числовой последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Производной этого ряда называется формальный степенной ряд вида

$$F'(z) = a_1 + a_2 \frac{z}{1!} + a_3 \frac{z^2}{2!} + \ldots + a_{n+1} \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Иными словами, "экспоненциальной" производной числовой последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ является сдвинутая на одну позицию влево числовая последовательность $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

3.4.2. Для операции взятия производной в кольцах $\mathbb{C}[[z]]$ и $\mathbb{C}_e[[z]]$ формальных степенных рядов можно выводить свойства, аналогичные привычным нам свойствам производной из классического анализа. При этом вывод этих свойств зачастую оказывается даже более простым по сравнению с аналогичным выводом в курсе математического анализа.

Пример 3.3. Докажем, что если $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ и $f'(z) = 0$, то $f(z) = a_0$, т.е. $f(z)$ отвечает числовая последовательность вида $(a_0, 0, 0, \ldots)$.

Равенство двух формальных степенных рядов означает равенство коэффициентов при соответствующих степенях z. Поэтому равенство $f'(z) = 0$ означает, что все коэффициенты левого формального степенного ряда равны нулю:

$$n \cdot a_n = 0 \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \ldots = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(z) = a_0 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \ldots = a_0.$$

Очевидно, что это же свойство выполняется и для функции $F(z) \in \mathbb{C}_e[[z]]$.

Пример 3.4. Докажем, что если $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ и $f'(z) = f(z)$, то

$$f(z) = c \cdot \left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right] =: c \cdot e^z.$$

Как и в предыдущем примере, приравняем коэффициенты рядов $f(z)$ и $f'(z)$ при одинаковых степенях z:

$$n \cdot a_n = a_{n-1} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots \quad \Longrightarrow \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n\,(n-1)} = \ldots = \frac{a_0}{n!} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = a_0 \cdot e^z.$$

Замечание 3.5. Видно, что и определение, и свойства операции дифференцирования формальных степенных рядов совпадают с определением и свойствами операции дифференцирования функций $f(z)$ комплексного аргумента, аналитических в некоторой малой окрестности точки $z = 0$. Этим обстоятельством активно пользуются при решении конкретных рекуррентных соотношений.

3.5. Перейдем теперь к анализу линейных рекуррентных соотношений с переменными коэффициентами. Начнем, как всегда, с простого примера.

3.5.1. Рассмотрим числовую последовательность, записанную в следующем явном виде:

$$a_n = \binom{2n}{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как

$$a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} = \frac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1) \cdot n! \cdot n!} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\, a_n,$$

то числовая последовательность a_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(n+1)a_{n+1} = 4na_n + 2a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad a_0 = 1.$$

3.5.2. Итак, мы решили в каком-то смысле обратную задачу — мы из явной формулы для коэффициентов a_n вывели рекуррентное соотношение, которому эти коэффициенты удовлетворяют. Постараемся теперь с использованием обыкновенных производящих функций решить прямую задачу, а именно, по заданному рекуррентному соотношению определить явный вид чисел a_n.

Для этого домножим наше рекуррентное соотношение на z^n и просуммируем его по n от 0 до $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n = 4\sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 4z\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n z^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

По определению производной обыкновенной производящей функции,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z^n = f'(z).$$

Поэтому предыдущее равенство можно записать в следующем компактном виде:

$$(1-4z)\, f'(z) = 2f(z), \qquad f(0) := a_0 = 1. \tag{20}$$

3.5.3. Возникает вопрос, как из этого уравнения определить обыкновенную производящую функцию $f(z)$. Стандартный прием здесь состоит в следующем. Соотношение вида (20) рассматривается как задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Пусть функция $f(z)$, представляющая собой решение этой задачи, является аналитической функцией комплексного аргумента в некоторой малой окрестности начала координат. В этом случае она единственным образом раскладывается в этой окрестности в степенной ряд вида

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

При этом, так как операции дифференцирования и умножения таких рядов и формальных степенных рядов $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ совпадают, то коэффициенты a_n этого ряда удовлетворяют исходному рекуррентному соотношению.

В рассматриваемом примере задача (20) легко решается методом разделения переменных:

$$\frac{df}{f} = \frac{2\,dz}{1-4z} = -\frac{1}{2}\frac{d(1-4z)}{(1-4z)} \iff d\ln(f) = -\frac{1}{2}d\ln(1-4z) \implies f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}.$$

Полученная функция $f(z)$ комплексного аргумента z является аналитической в окрестности точки $z = 0$ — она раскладывается в степенной ряд в этой окрестности по формуле бинома Ньютона:

$$f(z) = (1-4z)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-4z)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-n+1)}{n!}(-4)^n z^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!} 2^n z^n = \big|_{n!2^n=(1\cdot 2)(2\cdot 2)(3\cdot 2)\ldots(n\cdot 2)=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\big| =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n)}{(n!)^2} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} z^n.$$

3.5.4. Заметим, что условие аналитичности функции $f(z)$ в окрестности нуля является в данном алгоритме существенным. Оно обычно выполняется лишь в том случае, если соответствующие коэффициенты a_n растут не слишком быстро. В противном случае описанный выше алгоритм решения рекуррентных соотношений с переменными коэффициентами может перестать работать.

В качестве характерного примера рассмотрим следующее несложное линейное рекуррентное соотношение с переменными коэффициентами:

$$a_{n+1} = (n+1)\, a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad a_0 = 1. \tag{21}$$

Попытаемся решить его с помощью обыкновенных производящих функций. Домножая рекуррентное соотношение на z^{n+1} и суммируя по n от 0 до $+\infty$, имеем

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+1} = z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n z^{n-1} + z \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad f(z) - 1 = z^2 f'(z) + z f(z), \qquad f(0) = 1.$$

Полученная задача Коши не имеет решения, аналитического в окрестности начала координат. Этот результат в данном случае легко объясним. Действительно, исходное рекуррентное соотношение (21) настолько простое, что мы легко можем получить явное выражение для коэффициентов a_n:

$$a_{n+1} = (n+1)\, a_n = (n+1)\, n\, a_{n-1} = \ldots = (n+1)!\, a_0 = (n+1)!$$

Отвечающий этой числовой последовательности степенной ряд

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + n! z^n + \ldots = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \ldots + n!\, z^n + \ldots,$$

как уже отмечалось ранее, расходится при любых $z > 0$, если рассматривать его с точки зрения обычного математического анализа.

3.5.5. В принципе, полученное нами дифференциальное уравнение можно преобразовать так, чтобы его решение выражалось через гипергеометрические ряды, и построить искомое решение $a_n = n!$ (см., например, [**?**]). Однако сама процедура получения такого решения оказывается крайне сложной по сравнению со сложностью исходного рекуррентного соотношения. Оказывается, однако, что ситуацию можно подправить, решая это рекуррентное соотношение не с помощью обыкновенных, а с помощью экспоненциальных производящих функций.

Действительно, заметим, что числовой последовательности $a_n = n!$ в кольце $\mathbb{C}_e[[z]]$ формальных степенных рядов отвечает ряд

$$F(z) = 1 + 1! \cdot \frac{z^1}{1!} + 2! \cdot \frac{z^2}{2!} + \ldots + n! \cdot \frac{z^n}{n!} + \ldots = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Такому степенному ряду в математическом анализе отвечает функция $1/(1-z)$, аналитическая в области $|z| < 1$. Следовательно, есть надежда, что заменяя в алгоритме обыкновенную производящую функцию на экспоненциальную, мы сможем добиться успеха.

Именно, введем для числовой последовательности a_n, описываемой рекуррентным соотношением (21), экспоненциальную производящую функцию

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Домножим (21) на $z^{n+1}/(n+1)!$ и просуммируем его по n:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{z^{n+1}}{n!} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(z) - 1 = z\,F(z) \qquad \Longrightarrow \qquad F(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Итак, в случае, когда коэффициенты a_n, отвечающие линейному рекуррентному соотношению с переменными коэффициентами, растут слишком быстро, разумно для решения этого соотношения использовать экспоненциальные производящие функции.

3.5.6. В связи с последним утверждением возникает естественный вопрос: а что, если числовая последовательность a_n будет расти столь быстро, что и отвечающий ей ряд $F(z)$, понимаемый в смысле математического анализа, будет расходиться всюду в окрестности нуля? В принципе такие примеры придумать можно. Однако на практике такие задачи, как правило, все же не встречаются.

3.5.7. Разумеется, не все линейные рекуррентные соотношения с переменными коэффициентами сводятся к линейным алгебраическим уравнениям на экспоненциальные производящие функции. Часто соответствующие этим соотношениям уравнения содержат производные экспоненциальных производящих функций.

Рассмотрим, к примеру, рекуррентное соотношение

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \qquad B_0 = 1 \tag{22}$$

для чисел Белла B_n, описывающих количество всевозможных разбиений n-элементного множества. Домножим это равенство на $z^n/n!$ и просуммируем по n от нуля до $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} B_{n+1}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\frac{z^n}{n!}.$$

В левой части этого равенства стоит, по определению, производная $B'(z)$ рассматриваемой экспоненциальной производящей функции. Правая его часть представляет собой произведение пары экспоненциальных функций — $B(z)$ и функции

$$1 + 1 \cdot \frac{z}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + \ldots + 1 \cdot \frac{z^n}{n!} + \ldots := e^z.$$

Следовательно, в терминах экспоненциальных производящих функций равенство (22) записывается так:

$$B'(z) = e^z B(z), \qquad B(0) := B_0 = 1.$$

Рассмотрим теперь последние равенства как задачу Коши для функции $B(z)$ комплексного аргумента z. Эта задача легко решается:

$$d \ln B(z) = de^z, \qquad B(0) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad B(z) = e^{e^z - 1}.$$

Заметим, что получившаяся в результате решения функция $B(z)$ с точки зрения математического анализа представляет собой хоть и быстрорастущую, но аналитическую функцию комплексного аргумента при любом $z \in \mathbb{C}$.

4 Числа Каталана. Нелинейные рекуррентные соотношения

4.1. Начнем с характерного примера — с подсчета так называемых правильных скобочных последовательностей.

4.1.1. Как известно, порядок вычислений в любом арифметическом выражении можно однозначно задать расстановкой скобок. Давайте возьмем какое-то достаточно произвольное арифметическое выражение, например,

$$(3 - 1) \cdot (4 + (15 - 9) \cdot (2 + 6)),$$

и сотрем в нем все числа и знаки арифметических операций. В результате такого действия мы получим последовательность открывающихся и закрывающихся скобок

$$()(()()),$$

представляющую собой так называемую правильную скобочную последовательность.

Определение 4.1. Правильная скобочная последовательность — это строка, состоящая из n открывающихся и n закрывающихся скобок, обладающая следующим свойством: при проходе вдоль этой структуры слева направо количество открывающихся скобок всегда больше или равно количеству закрывающихся скобок.

Перечислим все правильные скобочные последовательности с числом *пар* скобок $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{array}{lll} n = 1: & () & \text{– 1 последовательность;} \\ n = 2: & ()(),\ (()) & \text{– 2 последовательности;} \\ n = 3: & ()()(),\ ()(()),\ (())(),\ (()()),\ ((())) & \text{– 5 последовательностей.} \end{array}$$

Числа C_n, описывающие количество таких последовательностей, называются *числами Каталана.* Как мы увидим несколько позднее, удобно по определению положить $C_0 = 1$.

Последовательность чисел Каталана

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \ldots$$

(последовательность $A000108$ в `OEIS` (`oeis.org`)) встречается в огромном количестве различных комбинаторных задач. В книге [?] приведено порядка 100 задач, в которых эти числа появляются. Приведем лишь несколько наиболее важных из них.

4.1.2. Рассмотрим вначале очень простую интерпретацию правильной скобочной последовательности — задачу об очереди в кассу (см. [?]). Предположим, что у кассы кинотеатра стоит очередь, состоящая из $2n$ человек. У половины из них имеется по 100 рублей, у второй половины — по 50 рублей. Билет в кино стоит 50 рублей. В начале продажи билетов касса кинотеатра пуста. Спрашивается, сколькими способами можно расставить людей в очереди правильно, т.е. так, чтобы никому не пришлось ждать у кассы сдачу.

Очевидно, что между этой задачей и задачей о количестве правильных скобочных последовательностей имеется биекция: любому человеку, имеющему 50 рублей, отвечает открывающаяся скобка в правильной скобочной последовательности, а человеку со 100 рублями — закрывающаяся скобка.

4.1.3. Задачу об очереди в кассу часто формулируют более формально, а именно, как задачу о подсчете количества различных *слов Дика* длины $2n$. Словом Дика называют строку длины $2n$ над алфавитом, состоящим из двух символов (например, X и Y), в которой количество символов X и Y совпадает, и в которой никакой начальный сегмент строки не содержит символов Y больше, чем символов X. В этой формулировке биекция с задачей о подсчете правильных скобочных последовательностей имеет, очевидно, вид

$$(\longleftrightarrow X, \qquad\qquad) \longleftrightarrow Y.$$

4.1.4. К задаче о подсчете правильных скобочных последовательностей сводится, очевидно, и задача о перечислении путей на плоскости, выходящих из начала координат, состоящих из отрезков $(1,1)$ и $(1,-1)$, заканчивающихся в точке $(2n,0)$ на оси абсцисс и нигде не пересекающих эту ось. Такие пути на плоскости называются *путями Дика* (рис 1). Биекция с правильными скобочными последовательностями здесь такова:

$$(\longleftrightarrow \text{вектор } (1,1), \qquad\qquad) \longleftrightarrow \text{вектор } (1,-1).$$

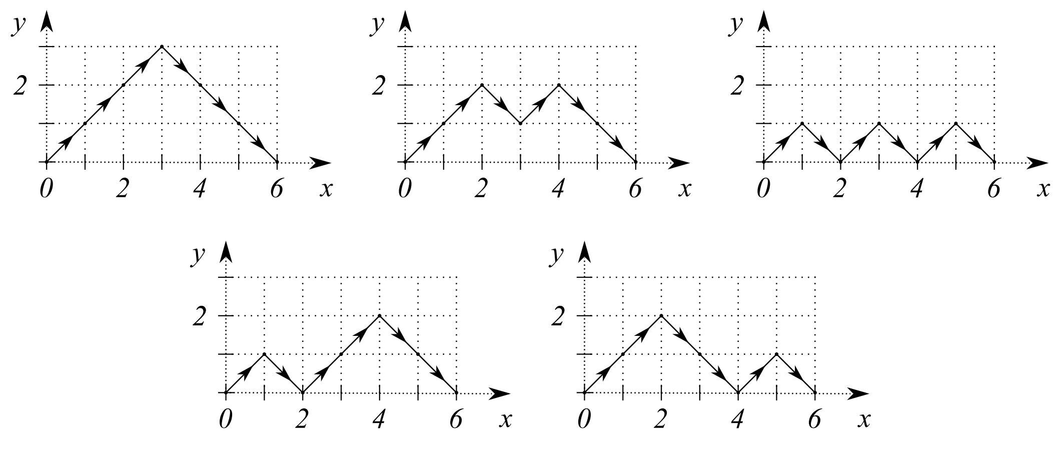


Рис. 1: Все пути Дика из трёх пар шагов.

4.1.5. Одной из основных дискретных структур, использующихся в теории алгоритмов, является плоское корневое бинарное дерево, иногда называющаяся просто бинарным или двоичным деревом. Неформально корневое дерево — это дерево, в котором любая вершина имеет ровно двух (возможно, пустых) потомков — левого и правого (рис. 2). В упражнении **??** предлагается доказать, что количество таких деревьев на n вершинах описывается числами Каталана C_n.

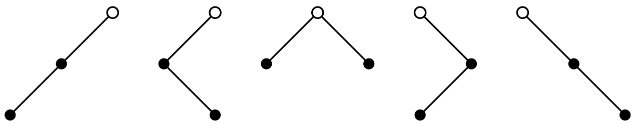


Рис. 2: Все бинарные деревья на трёх вершинах.

4.1.6. Рассмотрим выражение вида

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}, \tag{23}$$

где элементы a_i принадлежат множеству S с введенной на нем неассоциативной бинарной операцией $' \cdot '$. Очевидно, что это выражение не имеет смысла до тех пор, пока мы не расставим скобки так, чтобы указать на последовательность проводимых операций. Несложно убедиться, что количество расстановки скобок в описанном выше выражении есть число Каталана C_n (смотри упражнение **??**). Так, для случая $n = 3$ мы имеем следующие 5 различных вариантов расстановки скобок:

$$((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot a_4, \quad (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)) \cdot a_4, \quad (a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot a_4), \quad a_1 \cdot ((a_2 \cdot a_3) \cdot a_4), \quad a_1 \cdot (a_2 \cdot (a_3 \cdot a_4)).$$

4.1.7. Еще одна важная комбинаторная интерпретация чисел Каталана появилась впервые в работах Леонарда Эйлера (и, кстати сказать, задолго до работ самого Эжена Каталана). Эйлер рассмотрел количество разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника с занумерованными (т.е. различимыми) вершинами на треугольники непересекающимися между собой диагоналями этого $(n+2)$-угольника (рис. 3).

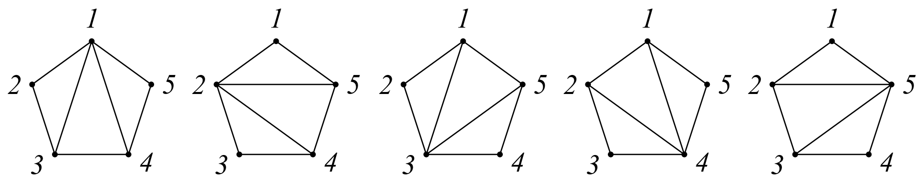


Рис. 3: Все триангуляции пятиугольника.

В упражнении **??** предлагается доказать, что это количество описывается числами Каталана C_n, установив биекцию между всеми триангуляциями выпуклого $(n+2)$-угольника и плоскими корневыми бинарными деревьями, построенными на n вершинах.

4.1.8. Рассмотрим теперь все плоские корневые деревья (рис 4), построенные на $(n + 1)$-й вершине, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Количество таких деревьев также равно числу Каталана C_n. Для того, чтобы это понять, осуществим в любом таком дереве поиск в глубину. При движении вдоль некоторого ребра вниз, т.е. от корня, сопоставим этому ребру левую открывающуюся скобку. При движении в обратном направлении сопоставим этому же ребру закрывающуюся скобку. Тем самым мы устанавливаем биекцию между всеми такими деревьями и всеми правильными скобочными последовательностями.

4.1.9. Наконец, перейдем к еще одному полезному понятию — стек-сортируемой последовательности. Согласно Кнуту [?], стек-сортируемая последовательность — это линейно упорядоченный набор из n чисел, который можно получить из линейно упорядоченной последовательности $(1, 2, \ldots, n)$ с помощью единственного стека.

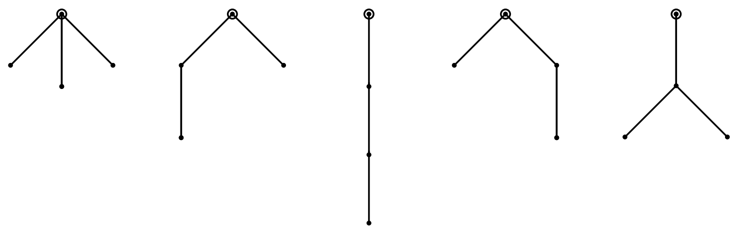


Рис. 4: Все плоские деревья на четырёх вершинах.

В качестве примера рассмотрим последовательность чисел $(1, 2, 3, 4)$. Разместим ее справа от стека и будем сдвигать ее влево, помещая числа в стек и вынимая их из этого стека с помощью следующей последовательности действий:

– поместить число 1 в стек;
– поместить число 2 в стек;
– извлечь число 2 из стека;
– поместить число 3 в стек;
– поместить число 4 в стек;
– извлечь число 4 из стека;
– извлечь число 3 из стека;
– извлечь число 1 из стека.

В результате этих действий мы получим линейно упорядоченный набор чисел $(2, 4, 3, 1)$.

Возникает вопрос: сколько различных наборов чисел можно получить из последовательности $(1, 2, \ldots, n)$ с помощью подобных операций? Ответ, конечно же, вполне ожидаем — это количество равно числу Каталана C_n.

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно установить следующую биекцию между парой используемых в алгоритме операций и парой скобок:

$$(\longleftrightarrow \text{ поместить число в стек,} \qquad\qquad) \longleftrightarrow \text{ извлечь число из стека.}$$

В случае $n = 3$ имеется пять стек-сортируемых последовательностей:

$$(1, 2, 3), \qquad (3, 2, 1), \qquad (2, 1, 3), \qquad (1, 3, 2), \qquad (3, 1, 2).$$

Единственной перестановкой, которую нельзя перевести в последовательность $(1, 2, 3)$ с помощью стека, является перестановка вида $(2, 3, 1)$.

4.2. Теперь, после стольких примеров, пора научиться вычислять числа Каталана. Начнем с вывода рекуррентного соотношения для этих чисел. В качестве основного объекта мы выберем множество всех правильных скобочных последовательностей. Рекуррентное соотношение для чисел C_n получим, воспользовавшись хорошо нам уже знакомым принципом разбиения множества на блоки и подсчетом количества элементов в каждом из блоков в отдельности.

4.2.1. Рассмотрим произвольную правильную скобочную последовательность. Для любой открывающейся скобки в такой последовательности можно ввести понятие парной ей закрывающейся скобки. Для этого будем идти от открывающейся скобки вправо и для каждой закрывающейся скобки будем проверять условие “количество закрывающихся скобок равно количеству открывающихся скобок”. Первая закрывающаяся скобка, для которой это правило выполнится, и будет парной для нашей открывающейся скобки.

4.2.2. Разобъем теперь множество всех правильных скобочных последовательностей на блоки. Для этого возьмем крайнюю левую открывающуюся скобку в правильной скобочной последовательности и поместим в k-й блок все правильные скобочные последовательности, для которых парная ей закрывающаяся скобка стоит на $2k$-м месте.

Так, в случае $n = 3$ имеем разбиение множества, состоящего из пяти различных правильных скобочных последовательностей, на три блока:

$$\underbrace{()()(),\qquad ()(());}_{k=1}\qquad\qquad \underbrace{(())();}_{k=2}\qquad\qquad \underbrace{(()()),\qquad ((()))}_{k=3}.$$

4.2.3. Рассмотрим крайнюю левую открывающуюся и парную ей закрывающуюся скобки — выделенную пару скобок в нашей последовательности. Основное наблюдение здесь состоит в следующем: как внутри, так и снаружи указанной пары скобок стоят правильные скобочные последовательности.

Действительно, рассмотрим вначале последовательность скобок, находящуюся внутри выделенной пары скобок. Мы выбирали выделенную пару из того условия, что в подпоследовательности скобок, начинающейся с крайней левой открывающейся скобки и заканчивающейся парной ей закрывающейся скобкой, количество открывающихся скобок равно количеству закрывающихся скобок. Но, если мы крайнюю пару скобок удалим, то это условие для оставшейся скобочной подпоследовательности сохранится. Условие "количество открывающихся скобок больше или равно количеству закрывающихся скобок" в этой подпоследовательности также выполняется — в противном случае оно бы было нарушено и для всей последовательности скобок в целом.

Проверка того, что и правая подпоследовательность является правильной, проводится с помощью аналогичных рассуждений.

4.2.4. Подсчитаем теперь количество элементов в k-м блоке. Для этого заметим, что количество способов построить правильную скобочную последовательность внутри выделенной пары скобок равно, очевидно, C_{k-1}. Вне зависимости от выбора этой последовательности мы C_{n-k} способами можем построить правильную скобочную подпоследовательность справа от выделенной пары скобок. Следовательно, по правилу произведения в каждом блоке существует $C_{k-1} \cdot C_{n-k}$ способов построить правильную скобочную последовательность длины $2n$. Общее же число способов получить такую последовательность согласно правилу суммы равно

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\, C_{n-k}, \qquad n = 1, 2, \ldots; \qquad C_0 = 1. \tag{24}$$

Заметим, что рекуррентное соотношение для чисел Каталана является нелинейным. Кроме того, n-й член последовательности C_n зависит от всех n предыдущих членов этой последовательности.

4.3. Постараемся решить рекуррентное соотношение (24).

4.3.1. Для этого введем обыкновенную производящую функцию для последовательности чисел Каталана:

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots$$

Нам будет удобно переписать рекуррентное соотношение (24) в следующем виде:

$$C_{n+1} = C_0 \cdot C_n + C_1 \cdot C_{n-1} + \ldots + C_n \cdot C_0 = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

Домножим это рекуррентное соотношение на z^{n+1} и просуммируем полученное равенство по n от 0 до $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1}\Big(\sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k}\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad f(z) - 1 = z\Bigg(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\Big(\sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k}\Big)\Bigg) = z\cdot f^2(z).$$

Следовательно, функция $f(z)$ определяется из следующего равенства:

$$f(z) = 1 + z\, f^2(z). \tag{25}$$

4.3.2. Как видно, нелинейное рекуррентное соотношение (24) для чисел C_n приводит к нелинейному же уравнению (25) на производящую функцию $f(z)$. Как правило, решение такого рода уравнений строится с помощью формулы обращения Лагранжа, о которой подробно будет рассказано в следующей главе. Мы же сейчас вновь воспользуемся подробно описанным в первом параграфе данной главы подходом, основанным на связи формальных степенных рядов с функциональными рядами из математического анализа.

Именно, предположим, что имеется функция $f(z)$ комплексного аргумента z, аналитическая в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющая уравнению (25). Тогда эта функция единственным образом раскладывается в окрестности точки $z = 0$ в степенной ряд

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$$

При этом, так как правила сложения и умножения таких рядов и формальных степенных рядов $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ совпадают, то коэффициенты C_n, полученные в результате такого разложения, будут удовлетворять исходному рекуррентному соотношению (24).

Итак, все, что нам остается сделать — это найти функцию $f(z)$, аналитическую в окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющую уравнению (25), а затем разложить ее по степеням z^n в окрестности этой точки. Для этого разрешим уравнение (25) относительно функции $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Решение

$$f(z) = \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z}$$

расходится в окрестности точки $z = 0$, поэтому его следует исключить из рассмотрения. Второе решение

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\,(1-4z)^{1/2} \tag{26}$$

разложим в ряд в окрестности точки $z = 0$, используя формулу бинома Ньютона:

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z}\Big(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)\ldots(1/2-n+1)}{n!}(-4z)^n\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2z}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!}(-4)^n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-3)}{n!} z^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n\,((n-1)!)^2}\, z^{n-1} = \big|_{n'=n-1;\, n=n'+1;\, n'=0,1,2,\ldots}\big| = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{(2n')!}{(n'+1)\,(n'!)^2}\, z^{n'}.$$

Следовательно, числа Каталана могут быть выражены через биномиальные коэффициенты по формуле

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

4.3.3. Явная аналитическая формула (27) для чисел Каталана, переписанная в виде

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

допускает следующее элегантное комбинаторное доказательство, принадлежащее французскому математику A.André (1878). Общее количество всех возможных расстановок n открывающихся и n закрывающихся скобок в строке из $2n$ символов равно, очевидно,

$$P(2n; n, n) = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n},$$

где $P(2n; n, n)$ — количество перестановок с повторениями в строке длины $2n$ n неразличимых символов первого сорта и n неразличимых символов второго сорта (см. параграф 5 главы 1). Осталось из этого количества вычесть "неправильные" скобочные последовательности, т.е. такие, в которых нарушается условие "при проходе строки слева направо количество открывающихся скобок больше или равно количеству закрывающихся скобок".

Для этого рассмотрим любую такую "неправильную" скобочную последовательность. Найдем в этой строке первую закрывающуюся скобку, в которой условие "правильности" нарушается. Эта скобка будет стоять на $(2k+1)$-й позиции для некоторого $k = 0, 1, 2, \ldots$, а слева от нее в подстроке длины $2k$ количество открывающихся скобок, равное k, в точности равно количеству закрывающихся скобок. Теперь заменим в получившейся подстроке длины $(2k+1)$ все открывающиеся скобки закрывающимися и наоборот. В результате получим некоторую строку длины $2n$, содержащую ровно $(n+1)$ открывающуюся скобку и ровно $(n-1)$ закрывающуюся.

Теперь возьмем *любую* строку длины $2n$, содержащую $(n+1)$ открывающуюся скобку и $(n - 1)$ закрывающуюся. Оказывается, ее всегда можно превратить в *неправильную* скобочную последовательность обратным преобразованием. Действительно, будем идти вдоль такой строки слева направо и проверять условие "количество закрывающихся скобок больше или равно количеству открывающихся скобок". Так как общее количество открывающихся скобок в такой строке строго больше общего количества закрывающихся скобок, то обязательно найдется открывающаяся скобка, для которой это условие нарушится. Она будет стоять на $(2k+1)$-й позиции, а слева от нее будет стоять подстрока длины $2k$, в которой количество закрывающихся скобок (равное k) равно количеству открывающихся скобок. Меняя в такой подстроке открывающиеся скобки на закрывающиеся и наоборот, мы получаем строку, состоящую из n открывающихся и n закрывающихся скобок, в которой на $(2k+1)$-й позиции нарушается условие правильности скобочной последовательности.

Итак, мы установили взаимно-однозначное соответствие между множеством всех неправильных скобочных последовательностей и множеством всех строк длины $2n$, содержащих $(n+1)$ открывающуюся скобку и $(n-1)$ закрывающуюся скобку. Мощность последнего множества равна, очевидно,

$$P(2n; n+1, n-1) = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot (n-1)!} = \binom{2n}{n+1}.$$

Согласно принципу биекции, этому же числу равна и мощность множества всех неправильных скобочных последовательностей длины $2n$. Как следствие, количество всех правильных скобочных последовательностей равно

$$P(2n;n,n) - P(2n;n+1,n-1) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n,$$

что и требовалось доказать.

5 Комбинаторный смысл сложения и умножения производящих функций

5.1. Ранее мы ввели понятие обыкновенной и экспоненциальной производящих функций как элементов колец формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z]]$ и $\mathbb{C}_e[[z]]$, а также выписали формулы, позволяющие складывать и перемножать такие ряды. Настало время понять, какой же комбинаторный смысл имеют подобного рода операции.

5.1.1. Рассмотрим пару конечных или счетных множеств X, Y. Поставим в соответствие каждому из этих множеств некоторые обыкновенные ($f(z)$ и $g(z)$) или экспоненциальные ($F(z)$ и $G(z)$) производящие функции. Так как производящие функции являются элементами кольца формальных степенных рядов, то их можно складывать и перемножать между собой. Разберем вначале комбинаторный смысл сложения пары экспоненциальных или обыкновенных производящих функций.

Пример 5.1. Пусть X есть счетное множество всех *связных* графов. Приписывая любому такому графу, построенному на n-элементном множестве U_n вершин, вес $z^n/n! \in \mathbb{C}_e[[z]]$, мы сопоставляем множеству X экспоненциальную производящую функцию

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой описывают количество всех связных графов, которые мы можем построить на n-элементном множестве U_n.

Далее, пусть Y есть счетное множество всех *несвязных* графов, и пусть любому такому графу, построенному на n-множестве вершин U_n, также приписывается вес $z^n/n! \in \mathbb{C}_e[[z]]$. Тем самым мы ставим в соответствие множеству Y экспоненциальную производящую функцию

$$G(z) = b_0 + b_1\frac{z}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты которой подсчитывают количество всех возможных способов построить несвязный граф на n-элементном множестве вершин U_n.

Теперь практически очевидно, что производящая функция

$$H(z) = F(z) + G(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\frac{z}{1!} + (a_2 + b_2)\frac{z^2}{2!} + \ldots + (a_n + b_n)\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

соответствует счетному множеству Z всех графов, а ее коэффициенты $c_n = a_n + b_n$ описывают общее количество всех (и связных, и не связных) графов, построенных на n-множестве U_n.

5.1.2. Аналогичный комбинаторный смысл имеет операция сложения пары производящих функций (обыкновенных или экспоненциальных) и в общем случае. Именно, пусть у нас имеется пара *непересекающихся* множеств X и Y каких-то дискретных структур. Пусть, далее, каждому из этих множеств поставлена в соответствие некоторая производящая функция. Тогда сумма этих функций описывает множество Z, представляющее собой объединение множеств X и Y, а коэффициенты $c_n = a_n + b_n$ этой суммы подсчитывают общее количество дискретных структур (т.е. структур, принадлежащих как множеству X, так и множеству Y), которых мы можем построить на некотором n-элементном множестве U_n.

5.2. Несколько более нетривиальна комбинаторная интерпретация произведения пары производящих функций. Начнем с объяснения комбинаторного смысла произведения пары экспоненциальных производящих функций

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots \qquad \text{и} \qquad G(z) = b_0 + b_1\frac{z}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots .$$

5.2.1. Напомним, что произведением этих функций называется формальный степенной ряд $H(z) \in \mathbb{C}_e[[z]]$ вида

$$H(z) = F(z) \cdot G(z) = c_0 + c_1\frac{z}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots, \qquad \text{где} \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}. \tag{29}$$

Комбинаторный смысл этой операции следующий. Пусть a_n — это количество способов совершить какое-то комбинаторное действие или построить какую-либо дискретную структуру на n-элементном множестве U_n, b_n — это количество способов совершить еще какое-то комбинаторное действие или построить еще какую-либо дискретную структуру на том же самом n-множестве U_n. Тогда c_n есть количество способов совершить следующие комбинаторные действия: разбить всеми возможными способами n-множество U_n на два попарно непересекающихся подмножества размерами i и $(n-i)$ соответственно, совершить над i элементами первого подмножества первое комбинаторное действие a_i способами, а затем совершить над оставшимися $(n-i)$ элементами второго подмножества второе комбинаторное действие b_{n-i} способами.

Действительно, для любого фиксированного $i = 0, 1, \ldots, n$ мы можем $\binom{n}{i}$ способами выбрать элементы первого подмножества. Оставшиеся $(n-i)$ элементов второго подмножества выбираются при этом однозначно. Пусть для какого-то фиксированного разбиения мы a_i способами совершаем первое комбинаторное действие над элементами первого подмножества, и b_{n-i} способами совершаем второе комбинаторное действие над элементами второго подмножества. Тогда, согласно правилу произведения, для данного разбиения имеется $a_i b_{n-i}$ способов совершить оба этих действия. Умножая теперь произведение $a_i b_{n-i}$ на биномиальный коэффициент $\binom{n}{i}$ и меняя i от нуля до n, мы и получаем, что общее количество способов совершить описанные выше действия равно

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}.$$

5.2.2. Рассмотрим несколько типичных примеров использования комбинаторного смысла произведения экспоненециальных производящих функций.

Пример 5.2. Пусть у нас в аудитории имеется n студентов. Предположим, что нам нужно както разбить это множество студентов на две подгруппы, одну из них оставить в этой аудитории слушать лекцию, а вторую отправить в соседнюю аудиторию решать задачи. При этом во второй подгруппе нам нужно выбрать одного из студентов сходить за ключом от той аудитории, в которой подгруппа будет заниматься. Спрашивается, сколько существует возможных способов совершить эти действия.

Решение. Построим решение этой задачи с помощью производящих функций. Над студентами первой подгруппы мы никаких дополнительных действий не совершаем, поэтому $a_n = 1$. Во второй подгруппе нам нужно выбрать одного студента, который пойдет за ключом. Это можно сделать $b_n = n$ способами. Поэтому

$$F(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z, \qquad G(z) = 0 + 1 \cdot \frac{z}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + \ldots = z \cdot e^z.$$

Следовательно,

$$H(z) = F(z) \cdot G(z) = z \cdot e^{2z} = z + 2\frac{z^2}{1!} + 2^2\frac{z^3}{2!} + \ldots \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = n \cdot 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пример 5.3. Рассмотрим множество S всех перестановок. Известно, что количество c_n перестановок n-элементного множества $U_n = [n]$ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно $n!$. Следовательно, экспоненциальная производящая функция для множества S имеет вид

$$S(z) = 1 + 1!\frac{z}{1!} + 2!\frac{z^2}{2!} + \ldots = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Пусть σ_n есть некоторая произвольная перестановка элементов множества $[n]$. В этой перестановке какие-то i чисел, $i = 0, 1, \ldots, n$, остаются неподвижными, а остальные $(n-i)$ элементов меняют свое положение. Пусть D_n есть количество перестановок рассматриваемого множества $[n]$, в которых все элементы меняют свое положение, a_n — количество перестановок, при которых все элементы остаются на месте. Очевидно, что $a_n = 1$ для любого n. Постараемся найти явное выражение для чисел D_n.

Решение. Введем для этого экспоненциальные производящие функции

$$E(z) = 1 + 1\frac{z}{1!} + 1\frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z \qquad \text{и} \qquad D(z) = D_0 + D_1\frac{z}{1!} + D_2\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

отвечающие числовым последовательностям $a_n = 1$ и D_n. В соответствии с комбинаторным смыслом произведения таких функций имеем

$$S(z) = E(z) \cdot D(z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1-z} = e^z \cdot D(z).$$

Следовательно,

$$D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z},$$

откуда сразу же получается явное выражение для чисел d_n:

$$D_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)! = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right). \tag{30}$$

5.2.3. Задача определения чисел D_n в элементарной комбинаторике известна как задача о беспорядках. Она достаточно часто встречается в различных школьных олимпиадных задачах по математике в самых разнообразных формулировках. Одна из возможных ее переформулировок такова. Преподаватель проводит тестирование n студентов, а затем просит студентов обменяться ответами и проверить эти тесты так, чтобы никто не проверял свою собственную работу. В этом случае D_n есть количество возможных способов совершить эти действия.

Исторически впервые эти числа появились в 1708 году в работах французского математика Пьера Монмора. Монмор рассматривал две колоды карт, по n карт в каждой колоде, и поставил задачу о подсчете раскладок карт во второй колоде, при которых они бы не повторялись с картами первой колоды при смещении обеих колод на любое, но одинаковое количество карт (так называемая задача о смещениях — displacements problem).

Свойства чисел D_n напоминают свойства обычного факториала. Так, например, числа D_n удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$D_{n+1} = n\,(D_n + D_{n-1}) \quad \forall\ n > 1; \qquad D_0 = 1, \quad D_1 = 0. \tag{31}$$

Это же рекуррентное соотношение, но с другими начальными условиями, выполняется и для обычных факториалов:

$$(n+1)! = n(n! + (n-1)!), \quad \forall\ n > 1; \qquad 0! = 1, \quad 1! = 1.$$

Дональд Кнут [?] в этой связи предложил называть эти числа субфакториалами и ввел для них обозначение $D_n \equiv !n$.

5.2.4. В дальнейшем нам, наряду с произведением пары экспоненциальных производящих функций, понадобятся как формулы, так и комбинаторный смысл произведения нескольких ($k \geqslant 2$) таких функций.

Определение 5.4. Произведением k экспоненциальных производящих функций

$$F_m(z) = a_{m,0} + a_{m,1}\frac{z^1}{1!} + a_{m,2}\frac{z^2}{2!} + \ldots, \qquad m = 1, 2, \ldots, k$$

называется формальный степенной ряд вида

$$H(z) = F_1(z) \cdot F_2(z) \cdot \ldots \cdot F_k(z) = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

в котором коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n,\\ 0\leqslant i_m\leqslant n}} \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\ldots\binom{n-i_1-i_2-\ldots-i_{k-1}}{i_k} a_{1,i_1}a_{2,i_2}\ldots a_{k,i_k} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n,\\ 0\leqslant i_m\leqslant n}} \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_k!} a_{1,i_1}a_{2,i_2}\ldots a_{k,i_k}.$$

Комбинаторный смысл этого действия достаточно очевиден. Мы берем n-элементное множество, $\binom{n}{i_1}$ количеством способов выбираем в нем первое подмножество и совершаем над i_1 элементами этого подмножества первое комбинаторное действие a_{1,i_1} количеством способов. Затем из оставшегося $(n-i_1)$-элементного множества мы выбираем $\binom{n-i_1}{i_2}$ количеством способов второе подмножество и совершаем над его i_2 элементами второе комбинаторное действие a_{2,i_2} количеством способов. Продолжая далее, мы на k-м шаге получаем подмножество размером i_k, над которым мы a_{k,i_i} способами совершаем k-е комбинаторное действие. Если мы теперь переберем всевозможные разбиения такого рода, мы и получим, что c_n описывает общее количество способов совершить все эти комбинаторные действия.

5.3. Перейдем теперь к комбинаторной интерпретации произведения обыкновенных производящих функций. Напомним, что произведением пары таких функций

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

называется формальный степенной ряд вида

$$h(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \qquad \text{где} \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}. \tag{32}$$

В случае k таких функций

$$f_m(z) = a_{m,0} + a_{m,1} z + a_{m,2} z^2 + \ldots, \qquad m = 1, 2, \ldots, k$$

их произведением является функция

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

коэффициенты c_n в которой рассчитываются по формуле

$$c_n = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n,\\ 0\leqslant i_m\leqslant n}} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \ldots a_{k,i_k}.$$

5.3.1. Наиболее часто встречающейся на практике комбинаторной интерпретацией такого рода операции является формулировка, связанная с комбинаторными действиями над неразличимыми предметами. Именно, пусть имеется n неразличимых предметов, и пусть a_n и b_n есть количество способов совершить над этими предметами какие-то комбинаторные действия. Тогда c_n перечисляет все возможные способы разбиения совокупности n неразличимых предметов на два различимых, возможно пустых, блока, совершения над i элементами, попавшими в первый блок, первого комбинаторного действия a_i количеством способов, а над элементами, попавшими во второй блок, второго комбинаторного действия b_{n-i} количеством способов. Обобщение этой интерпретации на случай произведения k обыкновенных производящих функций очевидно.

Пример 5.5. Самой простой, но в то же время важной задачей, связанной с такого рода интерпретацией произведения обыкновенных производящих функций, является задача о раскладке n неразличимых предметов по k различимым ящикам. В качестве основной производящей функции в этой задаче выступает обыкновенная производящая функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой имеют следующий комбинаторный смысл: $a_n = 1$, если нам разрешено положить n предметов в выбранный ящик, и $a_n = 0$ в случае, если нам это делать запрещено. Например, производящая функция вида

$$f_{\leqslant 1}(z) = 1 + z$$

означает, что в выбранный ящик я могу либо ничего не положить ($a_0 = 1$), либо положить ровно один неразличимый предмет ($a_1 = 1$). Равенство нулю коэффициентов a_n, $n > 1$ означает, что в ящике запрещается размещать два и более предметов.

Рассмотрим теперь ящик, описывающийся производящей функцией вида

$$f_{\geqslant 1}(z) = z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

В такой ящик мы можем положить один, два и более предметов. Важно, что хотя бы один предмет в такой ящик мы положить обязаны.

Наконец, функция

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

описывает ситуацию, при которой всякие ограничения на количество предметов в ящике отсутствуют.

Тогда, например, в соответствии с комбинаторным смыслом произведения k обыкновенных производящих функций, коэффициенты c_n обыкновенной производящей функции, отвечающей произведению k функций $f_{\leqslant 1}(z)$, дают нам количество способов раскладки n неразличимых предметов по k различимым ящикам при условии, что ни в один из этих ящиков я не могу положить более одного предмета. Эти коэффициенты определяются из формулы

$$h(z) = f_{\leqslant 1}^k(z) = (1+z)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} z^n \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = \binom{k}{n}.$$

В случае отсутствия ограничений на количество предметов в одном ящике аналогичные рассуждения дают производящую функцию

$$h(z) = f^k(z) = (1 + z + z^2 + \ldots)^k = \frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) z^n \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right).$$

Наконец, в случае, когда в каждый ящик нам необходимо положить хотя бы один предмет, имеем

$$h(z) = f_{\geqslant 1}^k(z) = (z + z^2 + \ldots)^k = \frac{z^k}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) z^{n+k} \quad \Longrightarrow \quad c_n = \left(\!\!\binom{k}{n-k}\!\!\right) = \binom{n-1}{k-1}.$$

5.3.2. Мы продемонстрировали, как с помощью описанного выше подхода решаются три основные наши задачи о раскладке n неразличимых предметов по k различимым ящикам. Однако, пользуясь этим подходом, мы довольно просто можем решать и множество других, самых разнообразных задач того же рода.

Пример 5.6. Решим задачу раскладки n неразличимых предметов по трем ящикам при условии, что в первый ящик мы можем положить ровно один предмет, во второй — не более одного предмета, а в третий — два, четыре или пять предметов. На языке производящих функций это означает, что

$$f_1(z) = z, \qquad f_2(z) = 1 + z, \qquad f_3(z) = z^2 + z^4 + z^5.$$

Для определения же общего количества способов раскладки n неразличимых предметов по таким трем ящикам нам необходимо вычислить произведение

$$h(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot f_3(z) = z(1+z)(z^2 + z^4 + z^5) = z^3 + z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7.$$

Отсюда, в частности, следует, что семь предметов в эти ящики мы можем разложить лишь одним способом.

5.3.3. Заметим сразу же, что использование экспоненциальной производящей функции

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты которой имеют тот же комбинаторный смысл, что и у функции $f(z)$ предыдущего пункта, позволяет столь же эффективно решать аналогичные задачи о раскладке n *различимых* предметов по k различимым ящикам. Рассмотрим, к примеру, производящую функцию

$$F_{\leqslant 1}(z) = 1 + \frac{z}{1!} = 1 + z.$$

Она описывает ситуацию, когда в один ящик я могу положить не более одного предмета. Тогда количество способов раскладки n различимых предметов по k различимым же ящикам при наличии такого ограничения на количество предметов в ящике определяется как коэффициент c_n при $z^n/n!$ в разложении функции $H(z) = [F_{\leqslant 1}(z)]^k$:

$$H(z) = [F_{\leqslant 1}(z)]^k = (1+z)^k = 1 + k\frac{z}{1!} + k(k-1)\frac{z^2}{2!} + \ldots + k(k-1)\ldots(k-n+1)\frac{z^n}{n!} + \ldots + z^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{k}(k)_n\frac{z^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = (k)_n = k(k-1)\ldots(k-n+1).$$

Использование производящей функции вида

$$F(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = e^z$$

позволяет легко решить задачу о количестве способов раскладки n различимых предметов по k различимым ящикам при отсутствии ограничений на количество предметов в каждом ящике: возводя эту функцию в k-ю степень, имеем

$$H(z) = [F(z)]^k = e^{kz} = \sum_{n=0}^{+\infty}k^n\frac{z^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = k^n.$$

Наконец, ситуации, когда в данный ящик мы можем положить один или более различимых предметов, отвечает производящая функция вида

$$F_{\geqslant 1}(z) = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = e^z - 1.$$

Для того, чтобы решить с ее помощью задачу о раскладке n различимых предметов по k различимым ящикам при условии, что в любом ящике должен находиться хотя бы один предмет, нужно возвести $F_{\geqslant 1}(z)$ в k-ю степень и воспользоваться биномом Ньютона для вычисления коэффициентов при z^n:

$$H(z) = [F_{\geqslant 1}(z)]^k = (e^z - 1)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}e^{(k-i)z}.$$

Учитывая, что

$$e^{(k-i)z} = 1 + (k-i)\frac{z}{1!} + (k-i)^2\frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}(k-i)^n\frac{z^n}{n!},$$

окончательно получаем

$$H(z)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}(k-i)^n\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\Big[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\Big]=\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{S}(n,k)\frac{z^n}{n!}\qquad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\qquad \widehat{S}(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Более того, мы теперь, как и в случае раскладки неразличимых предметов, можем решать с помощью описанной выше техники и довольно сложные задачи смешанного типа.

Пример 5.7. Определить количество способов раскладки n различимых предметов по четырем ящикам при условии, что во второй ящик разрешается класть только четное, а в четвертый — только нечетное число предметов.

Решение. В этом случае

$$F_1(z)=F_3(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=e^z,$$

$$F_2(z)=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$F_4(z)=\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\frac{e^z-e^{-z}}{2},$$

поэтому

$$H(z)=e^{2z}\frac{e^z+e^{-z}}{2}\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{1}{4}\left(e^{4z}-1\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}4^{n-1}\frac{z^n}{n!}\qquad\Longrightarrow\qquad c_n=4^{n-1},\quad n=1,2,\ldots$$

5.3.4. Вернемся к комбинаторному смыслу произведения обыкновенных производящих функций. Мы сказали, что произведение таких функций хорошо подходит для работы с неразличимыми предметами. Однако такая комбинаторная интерпретация не является единственно возможной — мы можем придумать и другие, также чрезвычайно полезные на практике комбинаторные интерпретации произведения обыкновенных производящих функций.

Рассмотрим, к примеру, какое-то *линейно упорядоченное* n-элементное множество X различимых элементов (дни в календаре, люди в очереди, солдаты в строю) [?]. Разбить такое множество на два упорядоченных блока, один из которых состоит из первых i элементов X, а второй — из оставшихся $(n-i)$ элементов, можно, как и в случае неразличимых элементов, лишь одним способом. Если теперь над элементами первого блока совершить комбинаторное действие a_i способами, а над элементами второго — комбинаторное действие b_{n-i} способами, то при фиксированном i мы получим, по правилу произведения, a_ib_{n-i} способов совершить эти действия одновременно. Суммируя теперь по всем таким i от 0 до n, мы получим общее количество способов совершить такого рода действия, равное коэффициенту c_n при z^n в разложении обыкновенной производящей функции $h(z)=f(z)\cdot g(z)$ в формальный степенной ряд по степеням z.

Пример 5.8. В осеннем семестре у преподавателя n рабочих дней. Преподаватель может поделить семестр, состоящий из n дней, на две части, посвятив первую часть (первые k дней,

$1 \leqslant k \leqslant n-2$) теории, а вторую часть (последние $n-k$ дней) — практическим занятиям. При этом предполагается, что число k преподаватель имеет право выбирать по своему усмотрению. В первой части семестра преподаватель должен предусмотреть тот факт, что ему в один из рабочих дней придется уехать в командировку. Во второй части ему понадобятся два рабочих дня для поездки на конференцию. Сколькими способами преподаватель может совершить эти комбинаторные действия? Использовать производящие функции для получения замкнутого ответа на данную задачу.

Решение. Заметим, прежде всего, что как и в любом множестве, в линейно упорядоченном множестве X количество способов выбрать i из n элементов равняется биномиальному коэффициенту $\binom{n}{i}$. Поэтому количество способов выбора одного элемента из n-элементного линейно упорядоченного множества равно

$$a_n = \binom{n}{1} = n,$$

а количество способов выбора двух элементов равно

$$b_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

При фиксированном k у преподавателя имеется

$$a_k b_{n-k} = k\,\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

способов выбрать один день на командировку в первой части семестра и два дня во второй части семестра. Всего же преподаватель может

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\,\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

способами организовать свою работу в осеннем семестре.

Для нахождения более компактной формы записи этого решения введем для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ обыкновенные производящие функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,z^n \qquad \text{и} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2}\,z^n.$$

Заметим, что

$$f(z) = 0 + 1\cdot z + 2\cdot z^2 + \ldots + n\cdot z^n + \ldots = z\cdot(1\cdot z^0 + 2\cdot z^1 + 3\cdot z^2 + \ldots + n\cdot z^{n-1} + \ldots) =$$
$$= z\cdot(1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots)'_z = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Далее,

$$g(z) = 1\cdot z^2 + 3\cdot z^3 + 6\cdot z^4 + 10\cdot z^5 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot z^n + \ldots =$$
$$= \frac{z^2}{2}\cdot(2\cdot 1\cdot z^0 + 3\cdot 2\cdot z^1 + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot z^{n-2} + \ldots) =$$
$$= \frac{z^2}{2}(1 + 2\cdot z^1 + \ldots + n\cdot z^{n-1} + \ldots)'_z = \frac{z^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)'_z = \frac{z^2}{2}\cdot\frac{2}{(1-z)^3} = \frac{z^2}{(1-z)^3}.$$

Тогда, согласно комбинаторному смыслу произведения обыкновенных производящих функций, количество h_n способов совершить описанные в упражнении комбинаторные действия описывается производящей функцией

$$h(z) = f(z) \cdot g(z) = \frac{z^3}{(1-z)^5} = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) z^n = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4}{n} z^n =$$

$$= z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4}{4} z^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \binom{n+1}{4} z^n,$$

откуда следует, что

$$c_n = \binom{n+1}{4}, \qquad n = 3, 4, \ldots$$

5.4. Заметим, что до этого момента стандартный способ решения комбинаторных задач состоял у нас в следующем: мы, используя базовые комбинаторные принципы (правило сложения, умножения, а также их обобщения) получали рекуррентные соотношения для искомых чисел, а затем, используя производящие функции как элементы формальных степенных рядов, эти соотношения решали. Теперь же мы, зная комбинаторный смысл основных операций над производящими функциями, можем сразу строить решение задачи в терминах производящих функций.

5.4.1. В качестве характерного примера вернемся к задачам, связанным с числами C_n Каталана. Пусть, как и прежде,

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$$

есть обыкновенная производящая функция для последовательности $\{C_n\}$ чисел Каталана, описывающих решение этой задачи. Во второй главе было показано, что эта функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$f(z) = 1 + z f^2(z). \tag{33}$$

Оказывается, это уравнение легко интерпретируется (а следовательно, и получается) с использованием комбинаторного смысла сложения и умножения обыкновенных производящих функций. Покажем, как это делается, на примере задачи о перечислении путей Дика на плоскости (рис. 5) и (параллельно) на примере правильной скобочной последовательности.

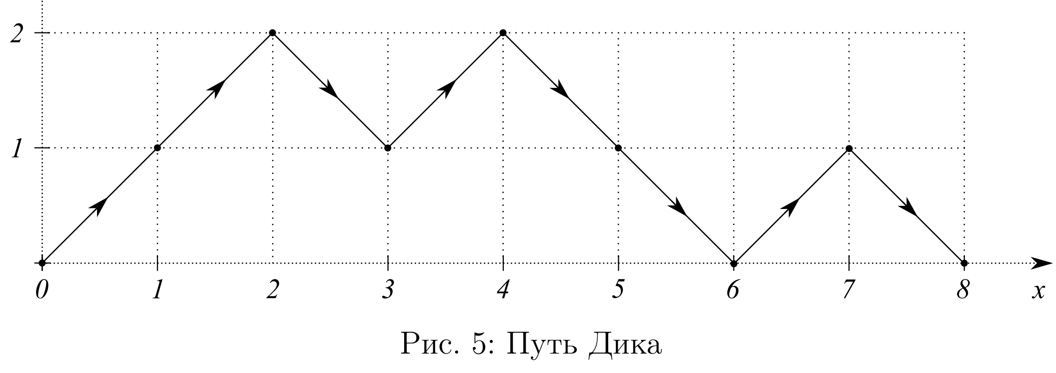


Рис. 5: Путь Дика

5.4.2. Прежде всего, напомним комбинаторный смысл сложения пары производящих функций — он отвечает разбиению множества перечисляемых объектов на два блока. В данной задаче мы все множество путей Дика можем разбить на два непересекающихся подмножества — подмножество, состоящее из тривиального пути Дика, а именно, единственной точки $x = 0$ на плоскости, и подмножество, содержащее все остальные, нетривиальные пути. На языке производящих функций первое подмножество как раз и описывается производящей функцией $h(z) = 1$, то есть единицей в правой части (33). Осталось объяснить второе слагаемое в правой части (33), а именно, произведение трех производящих функций $g(z) = z$, $f(z)$ и $f(z)$.

Для этого воспользуемся комбинаторной интерпретацией произведения обыкновенных производящих функций, связанной с разбиениями линейно упорядоченного множества. В задаче о правильных скобочных последовательностях линейно упорядоченное множество — это множество пар скобок (открывающейся и парной ей закрывающейся), пронумерованных в порядке следования открывающейся скобки. В задаче о путях Дика — это множество, состоящее из однократных подъемов и соответствующих им спусков, пронумерованное в порядке следования подъемов. Так, для правильной скобочной последовательности $(()())()$, являющейся аналогом изображенного на рис. 5 пути Дика, линейный порядок на множестве пар скобок задается следующим образом:

$$\begin{matrix} (& (&) & (&) &) & (&) \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 4 & 4 \end{matrix}$$

Теперь заметим, что первая пара скобок в правильной скобочной последовательности разбивает все множество пар скобок на три блока — блок, состоящий из самой этой первой пары скобок, блок, состоящий из пар скобок, попавших внутрь первой пары, а также блок, стоящий правее первой пары скобок. На языке обыкновенных производящих функций это разбиение как раз и описывается произведением вида $z \cdot f(z) \cdot f(z)$. Действительно, обыкновенная производящая функция

$$g(z) = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \ldots,$$

вырезает из всех непустых линейно упорядоченных множеств первый элемент этого множества. Произведение же $z \cdot f(z) \cdot f(z)$ описывает количество способов совершить над линейно упорядоченным множеством пар скобок (подъемов/спусков) следующие комбинаторные действия: разбить это множество на три блока — левый, центральный и правый — так, чтобы левый блок состоял только лишь из одного элемента, а затем построить в оставшихся двух блоках правильные скобочные последовательности (пути Дика).

5.4.3. Уравнение (33) допускает и еще одну полезную комбинаторную интерпретацию. Именно, произведение $z \cdot f(z)$ можно рассматривать как производящую функцию

$$z \cdot f(z) = C_0 \cdot z + C_1 \cdot z^2 + C^2 \cdot z^3 + \ldots + C_{n-1} \cdot z^n + \ldots,$$

описывающую сдвинутую на один шаг вправо числовую последовательность

$$\{0, C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, \ldots\}.$$

Тогда произведение $zf(z) \cdot f(z)$ в правой части (33) можно трактовать следующим образом. Любой нетривиальный путь Дика состоит из шага вверх, произвольного (возможно, пустого) пути Дика из точки с координатами $(1, 1)$ в точку с координатами $(2i - 1, 1)$, из шага вниз, а затем вновь из произвольного (возможно, пустого) пути Дика. Тогда сомножитель $z \cdot f(z)$ как раз и описывает произвольный путь Дика из точки с координатами $(1, 1)$ в точку с координатами $(2i - 1, 1)$, то есть путь Дика, соответствующий числу Каталана C_{n-1}.

6 Понятие композиции обыкновенных производящих функций

6.1. До этого момента мы рассматривали только две основные операции над производящими функциями — сложение и умножение таких функций. Наряду с этими операциями на практике не менее часто используется и еще одна важная и чрезвычайно полезная операция над производящими функциями, а именно, композиция производящих функций. Определение композиции обыкновенных производящих функций в общем случае дать достаточно сложно. Мы рассмотрим здесь только лишь один достаточно частный случай этой операции, который, тем не менее, поможет нам понять комбинаторный смысл операции композиции производящих функций и в более общих ситуациях. Кроме того, этот частный случай позволит нам построить решение целого ряда задач о раскладке неразличимых предметов по различимым ящикам в случае, когда количество k ящиков заранее не фиксировано.

6.1.1. Начнем мы с задачи, которая в [**?**] называется задачей о наклейке марок на бандероль.

Пример 6.1. За пересылку бандероли нужно уплатить 18 рублей, наклеивая на нее марки. На почте есть марки достоинством в 4, 6 и 10 рублей в неограниченном количестве. Сколькими способами можно оплатить пересылку бандероли, если два способа, отличающиеся количеством и/или *порядком* наклейки марок, считаются различимыми?

Прежде всего, давайте вручную переберем все возможные способы наклейки марок:

$$\begin{array}{rrrr}
6+6+6=18; & & & \\
10+4+4=18; & 4+10+4=18; & 4+4+10=18; & \\
6+4+4+4=18; & 4+6+4+4=18; & 4+4+6+4=18; & 4+4+4+6=18.
\end{array}$$

Итого имеем 8 различных способов. Наша задача — получить это число алгоритмически, т.е. без ручного перебора всех вариантов.

6.1.2. Попытаемся составить для этой задачи рекуррентное соотношение. Пусть $h(n)$ есть количество способов, которыми можно наклеить марки достоинством в 4, 6 и 10 рублей с учетом порядка их наклейки так, чтобы их общая стоимость равнялась n. Для подсчета $h(n)$ вновь воспользуемся стандартным приемом — разобъем множество всех вариантов на блоки и подсчитаем количество элементов в каждом блоке.

Основное наблюдение здесь состоит в том, что в нашей задаче порядок наклейки марок важен. Поэтому мы можем разбить множество всех вариантов на три блока в зависимости от того, марка какого достоинства была наклеена на бандероль последней. При этом понятно, что количество способов наклеить марки так, чтобы последней шла марка достоинством в i рублей, равно $h(n-i)$. Следовательно, для нашей задачи справедливо рекуррентное соотношение вида

$$h(n) = h(n-4) + h(n-6) + h(n-10),$$

которое нужно дополнить начальными условиями $h(0) = 1$, $h(n) = 0$ при $n < 0$.

6.1.3. Решим теперь это рекуррентное соотношение с помощью производящих функций. Введем для числовой последовательности $h(n) \equiv h_n$ обыкновенную производящую функцию

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots$$

Перепишем наше рекуррентное соотношение для удобства в следующем виде:

$$h_{n+10} = h_{n+6} + h_{n+4} + h_n, \qquad n \geqslant 0,$$

$$h_0 = 1,\ h_1 = h_2 = h_3 = 0,\ h_4 = 1,\ h_5 = 0,\ h_6 = 1,\ h_7 = 0,\ h_8 = 1,\ h_9 = 0.$$

Домножая это соотношение на z^{n+10} и суммируя по всем n, получаем равенство вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+10} z^{n+10} = z^4 \sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+6} z^{n+6} + z^6 \sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+4} z^{n+4} + z^{10} \sum_{n=0}^{+\infty} h_n z^n \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ h(z) - h_0 - \ldots - h_9 z^9 = z^4(h(z) - h_0 - \ldots - h_5 z^5) + z^6(h(z) - h_0 - \ldots - h_3 z^3) + z^{10} h(z)\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ h(z) - 1 - z^4 - z^6 - z^8 = z^4(h(z) - 1 - z^4) + z^6(h(z) - 1) + z^{10} h(z)\ \Longleftrightarrow$$

$$h(z)[1 - z^4 - z^6 - z^{10}] = 1 + z^4 + z^6 + z^8 - z^4 - z^8 - z^6 = 1,$$

из которого несложно получить явное выражение для искомой обыкновенной производящей функции:

$$h(z) = \frac{1}{1 - (z^4 + z^6 + z^{10})} = 1 + (z^4 + z^6 + z^{10}) + (z^4 + z^6 + z^{10})^2 + \ldots$$

При этом ответ на поставленную задачу при фиксированной стоимости n бандероли равен коэффициенту при z^n в разложении этой функции $h(z)$ по степеням z:

$$h(z) = 1 + z^4(1 + z^2 + z^6) + z^8(1 + z^2 + z^6)^2 + z^{12}(1 + z^2 + z^6)^3 + z^{16}(1 + z^2 + z^6)^4 + \ldots =$$

$$= 1 + z^4 + z^6 + z^8 + 3z^{10} + 2z^{12} + 5z^{14} + 6z^{16} + 8z^{18} + 13z^{20} \ldots$$

Отсюда, в частности, следует, что при $n = 18$ количество различных способов наклеить марки равно восьми.

6.1.4. Заметим теперь, что ответ на задачу, записанный в виде

$$h(z) = 1 + (z^4 + z^6 + z^{10}) + (z^4 + z^6 + z^{10})^2 + \ldots + (z^4 + z^6 + z^{10})^k + \ldots$$

имеет достаточно очевидную комбинаторную интерпретацию на языке обыкновенных производящих функций в духе рассуждений предыдущего параграфа.

Именно, введем производящую функцию

$$f(z) = 0 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 1 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + 1 \cdot z^6 + 0 \cdot z^7 + 0 \cdot z^8 + 0 \cdot z^9 + 1 \cdot z^{10} + 0 \cdot z^{11} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой описывают количество способов положить n неразличимых предметов в один единственный ящик. То, что $a_n = 0$ для всех $n \neq 4, 6, 10$, означает, что в данный ящик нам запрещено класть предметы, количество которых отлично от четырех, шести или десяти.

Теперь переформулируем исходную задачу о наклейке марок в терминах раскладки неразличимых предметов по ящикам. На языке раскладки предметов по ящикам наклеить на m-е место марку достоинством в i рублей означает поместить в m-й ящик i неразличимых предметов (например, i рублевых монет). Тогда при фиксированном числе k наклеиваемых марок (или, что тоже самое, при фиксированном числе k ящиков) количество способов наклеить марки общей стоимостью в n рублей (или количество способов разложить n неотличимых друг от друга рублевых монет по k различимым ящикам) равно коэффициенту при z^n у производящей функции вида

$$h_k(z) = (z^4 + z^6 + z^{10})^k = [f(z)]^k.$$

Однако в рассматриваемой задаче число k может быть любым. На языке производящих функций это означает, что для подсчета общего количества способов раскладки n неразличимых предметов *по заранее не фиксированному* числу различимых ящиков мы должны просуммировать все такие функции $h_k(z)$ по всем возможным значениям k:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} [f(z)]^k = \frac{1}{1 - f(z)} = \frac{1}{1 - (z^4 + z^6 + z^{10})}.$$

6.1.5. Приведенные выше рассуждения легко обобщаются на случай задачи о наклейке s различных марок достоинством в $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_s$ рублей каждая. Для этого введем производящую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

коэффициенты a_n которой равны единице в случае, когда n равно одному из чисел $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_s$, и нулю во всех остальных случаях:

$$f(z) = 1 \cdot z^{i_1} + 1 \cdot z^{i_2} + \ldots + 1 \cdot z^{i_s}.$$

Тогда количество $h(n)$ различных вариантов наклейки s марок с учетом их порядка на бандероль, стоимость отправки которой равна n, есть коэффициент при z^n в разложении производящей функции

$$h(z) = \frac{1}{1 - (z^{i_1} + z^{i_2} + \ldots + z^{i_s})} = \frac{1}{1 - f(z)}$$

по степеням z.

В частности, в случае наличия на почте марок любого достоинства (т.е. марок стоимостью в один рубль, в два рубля и так далее) в неограниченном же количестве производящая функция

$$f(z) = z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{z}{1 - z},$$

а решение задачи описывается функцией

$$h(z) = \frac{1}{1 - f(z)} = \frac{1}{1 - \dfrac{z}{1 - z}} = \frac{1 - z}{1 - 2z} = 1 + \frac{z}{1 - 2z} = 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + \ldots + 2^{n-1} z^n + \ldots$$

Следовательно, в этом случае количество $h(n)$ различных способов наклейки марок на бандероль, стоимость отправки которой равна n, есть 2^{n-1} при $n > 0$ и 1 при $n = 0$. На языке раскладки n неразличимых предметов по заранее не фиксированному количеству различимых ящиков это означает, что существует 2^{n-1} способов такой раскладки при условии, что в каждый из этих ящиков мы можем класть любое отличное от нуля количество предметов.

6.2. Заметим, что с формальной точки зрения сформулированная в предыдущем пункте задача эквивалентна проблеме поиска всех решений в *положительных* целых числах уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \qquad x_k \in \{i_1, \ldots, i_s\} \ \forall k \tag{34}$$

при условии, что порядок слагаемых в левой части этого равенства важен, а количество k этих слагаемых заранее не фиксировано. Возникает вопрос, а возможно ли получить решение такой задачи в *неотрицательных* целых числах?

6.2.1. Попробуем действовать по аналогии. В случае неотрицательных целых чисел производящая функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Формальное применение описанного в предыдущем пункте алгоритма приводит нас в этом случае к функции

$$h(z) = \frac{1}{1-f(z)} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-z}} = \frac{-1+z}{z},$$

которая не имеет смысла с точки зрения описанной во второй главе теории формальных степенных рядов — стоящая в знаменателе функция $g(z) = z$ не имеет обратного элемента по умножению в кольце $C[[z]]$.

В чем же причина нашей неудачи? Дело в том, что уравнение (34) имеет в *неотрицательных* целых числах бесконечное число решений. Действительно, мы можем бесконечным числом способов добавлять в левую часть этого уравнения бесконечное же число нулей. И результат сложения в правой части уравнения от этого, естественно, не изменится. Таким образом, комбинаторная задача в такой постановке смысла не имеет.

6.2.2. Осталось понять, как этот факт отражается на попытке решения задачи с использованием производящих функций. Рассмотрим для этого обыкновенную производящую функцию

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

По определению, положим

$$h(z) = \frac{1}{1-f(z)} := 1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^k + \ldots \tag{35}$$

и посмотрим, когда это определение имеет смысл с точки зрения теории формальных степенных рядов.

Предположим вначале, что $a_0 = 0$. В таком случае в правой части (35) всегда будет стоять конечное число слагаемых при степенях z^n, $n > 0$. Действительно,

$$[f(z)]^k = (a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^k = z^k (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots)^k.$$

Поэтому при всех значениях $k > n$ любая производящая функция вида $[f(z)]^k$ будет содержать только степени z, большие n. Как следствие, для того, чтобы сосчитать коэффициент при z^n у функции $h(z)$, достаточно ограничиться конечной суммой

$$1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^n.$$

Пусть теперь $a_0 \neq 0$. В этом случае *любая* степень $[f(z)]^k$ будет содержать слагаемые с z^n. Иными словами, таких слагаемых теперь будет бесконечно много, и подсчет коэффициентов при z^n становится невозможен. Таким образом, при $a_0 \neq 0$ операция (35) с точки зрения теории формальных степенных рядов смысла не имеет.

6.2.3. Итак, мы подошли к следующему определению. Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

есть обыкновенная производящая функция, коэффициент a_0 которой равен нулю. Тогда корректно определена обыкновенная производящая функция

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots := \frac{1}{1 - f(z)} = 1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^k + \ldots,$$

представляющая собой композицию $g(f(z))$ пары обыкновенных производящих функций $f(z)$ и $g(z) = 1/(1 - z)$.

6.2.4. Комбинаторный смысл описанной выше операции состоит в следующем. Пусть имеется n неразличимых предметов и пусть существует a_n способов совершить над ними какое-то комбинаторное действие. Предположим также, что $a_0 = 0$, то есть любые комбинаторные действия в случае $n = 0$ отсутствуют. Тогда h_n есть количество способов распределить эти n элементов по какому-то (заранее не фиксированному) числу k линейно упорядоченных непустых блоков, а затем совершить в каждом из таких блоков размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами.

Замечание 6.2. Как и в случае произведения обыкновенных производящих функций, еще одна трактовка комбинаторного смысла композиции $g(f(z)) = 1/(1 - f(z))$ связана с разбиением линейно упорядоченного множества на произвольное, заранее не фиксированное число непустых блоков, а затем с совершением в каждом из этих блоков комбинаторного действия, описываемого функцией $f(z)$.

7 Разбиение числа на слагаемые при отсутствии ограничений на количество слагаемых

7.1. Вернемся к задаче о наклейке марок на бандероль. На практике нас, как правило, не интересует порядок наклейки марок — обычно мы лишь хотим, чтобы стоимость наклеенных марок совпадала со стоимостью отправки бандероли. В такой постановке задача имеет всего три различных решения:

$$18 = 6 + 6 + 6 = 4 + 4 + 10 = 4 + 4 + 4 + 6.$$

В дальнейшем мы увидим, что решение подобного рода задач также связано с операцией композиции обыкновенных производящих функций. Однако сейчас мы покажем, как решить данную задачу непосредственно, на основе сведения ее к задаче о раскладке n неразличимых предметов по *фиксированному* числу k различимых ящиков.

7.1.1. Следуя привычному нам подходу, попытаемся вначале построить рекуррентное соотношение, описывающее количество $\Phi(n; 4, 6, 10)$ способов наклейки марок общей стоимостью n рублей без учета порядка наклеиваемых марок. Для этого разобьем все множество способов наклейки на блоки в зависимости от того, использовалась ли хоть раз марка данного достоинства (например, марка достоинством в 10 рублей) при наклейке марок на бандероль. В случае, если она использовалась, количество способов наклейки марок, очевидно, равно $\Phi(n - 10; 4, 6, 10)$. В случае же, когда она вовсе не использовалась, это количество равно $\Phi(n; 4, 6)$. Следовательно, для чисел $\Phi(n; 4, 6, 10)$ справедливо рекуррентное соотношение вида

$$\Phi(n; 4, 6, 10) = \Phi(n - 10; 4, 6, 10) + \Phi(n; 4, 6).$$

При фиксированном n данный подход позволяет шаг за шагом сосчитать искомое количество вариантов. Однако полученное рекуррентное соотношение имеет один существенный недостаток — искомые числа зависят не только от n, но и от нескольких дополнительных параметров. Это усложняет проведение расчетов по данной формуле. Кроме того, не очень понятно, как получить явное решение этого рекуррентного соотношения.

7.1.2. Оказывается, однако, что поставленная задача достаточно просто решается с помощью производящих функций. Действительно, с формальной точки зрения наша задача сводится к подсчету количества решений уравнения вида

$$4y_4 + 6y_6 + 10y_{10} = n$$

в целых неотрицательных числах. Последнее же уравнение имеет достаточно очевидную трактовку в терминах задачи о раскладке *неразличимых* предметов по *различимым* ящикам, а значит, может быть решена с использованием комбинаторного смысла произведения обыкновенных производящих функций.

Именно, пусть у нас имеется n неразличимых предметов и 3 различимых ящика. В первый из них мы можем складывать предметы лишь в случае, если их количество кратно четырем, во второй — в случае, если их количество кратно шести. Наконец, в последний, третий ящик мы можем складывать предметы в случае, если их количество кратно десяти. Соответствующие этим способам раскладки обыкновенные производящие функции равны

$$\varphi_4(z) = 1 + z^4 + z^8 + \dots, \qquad \varphi_6(z) = 1 + z^6 + z^{12} + \dots, \qquad \varphi_{10}(z) = 1 + z^{10} + z^{20} + \dots,$$

а производящая функция $\varphi(z)$, описывающая общее количество способов раскладки предметов по трем таким различимым ящикам, определяется так:

$$\varphi(z) = \varphi_4(z) \cdot \varphi_6(z) \cdot \varphi_{10}(z) = \frac{1}{(1-z^4)(1-z^6)(1-z^{10})}. \tag{36}$$

В упражнении **??** предлагается получить из формулы (36) следующее рекуррентное соотношение на количество h_n способов наклейки марок на бандероль:

$$h_n = h_{n-4} + h_{n-6} - h_{n-14} - h_{n-16} + h_{n-20}, \tag{37}$$

$$h_0 = 1, \qquad h_n = 0 \quad \forall\, n < 0.$$

Такое рекуррентное соотношение зависит лишь от одного параметра n, а временная сложность алгоритма, построенного на его основе, равна $\mathrm{O}(\log n)$.

7.1.3. Итак, успех в решении рассматриваемой задачи связан, прежде всего, с удачной ее переформулировкой. Именно, нам удалось переформулировать задачу в терминах раскладки n неразличимых предметов по фиксированному числу $k = 3$ различимых ящиков при наличии дополнительных ограничений на количество предметов в каждом ящике, а затем воспользоваться комбинаторным смыслом умножения $k = 3$ производящих функций. Достаточно ясно, как обобщить данный подход на другие задачи подобного типа.

Пусть, например, мы имеем право наклеивать на бандероль не более одной марки данного достоинства. В этом случае производящая функция, описывающая решение такой задачи, имеет вид

$$\varphi(z) = (1 + z^4)(1 + z^6)(1 + z^{10}) = 1 + z^4 + z^6 + 2z^{10} + z^{14} + z^{16} + z^{20}.$$

Мы видим, например, что сумму в 10 рублей мы можем получить двумя способами — наклеивая либо по одной марке достоинствами в 4 и в 6 рублей, либо наклеивая одну марку достоинством в 10 рублей.

С формальной точки зрения данная задача, очевидно, эквивалентна задаче поиска количества решений уравнения
$$4 \cdot y_4 + 6 \cdot y_6 + 10 \cdot y_{10} = n$$
при условии, что все y_m, $m = 4, 6, 10$, равны нулю или единице.

7.2. Описанная выше техника применима к решению и еще одной очень интересной и важной с практической точки зрения задачи — задачи о разбиении заданного числа $n > 0$ на слагаемые.

Определение 7.1. Разбиением целого положительного числа n на слагаемые (или, как еще говорят, на части) называется неупорядоченный набор положительных целых чисел, сумма которых равна n.

Нам хочется подсчитать количество $p(n)$ всех разбиений при фиксированном значении числа n. На языке раскладки предметов по ящикам эта задача равносильна подсчету количества способов раскладки n неразличимых предметов по заранее не фиксированному числу k неразличимых же ящиков при условии, что в каждый ящик мы обязаны положить хотя бы один предмет.

7.2.1. С формальной точки зрения любое разбиение n представляет собой некоторое решение в положительных целых числах уравнения
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n \tag{38}$$
при фиксированном $n > 0$ и произвольном $k > 0$. Понятно, что все x_i в этом уравнении ограничены сверху значением $x_i = n$ для любого $i \in [1, k]$. Сам же индекс k, в свою очередь, также ограничен сверху этим значением: случаю $k = n$ отвечает разложение n в сумму n единиц. Таким образом, более точно поставленная нами задача формулируется так:

Задача 7.2. Найти количество $p(n)$ решений в положительных целых числах уравнения (38) при дополнительных ограничениях $0 < x_i \leqslant n \ \forall\ i = 1, \ldots, k$; $0 < k \leqslant n$.

Заметим теперь, что порядок слагаемых в уравнении (38) роли не играет, и поэтому мы для определенности можем всегда считать, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k > 0$. Это соглашение, в свою очередь, позволяет нам в формулировке задачи избавиться от индекса k, а именно, искать количество $p(n)$ всех целых *неотрицательных* решений уравнения вида
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n, \qquad x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0.$$

7.2.2. Подсчитаем количество $p(n)$ разбиений для нескольких первых значений n:
$$\begin{aligned}
&p(1) = 1: \quad 1 = (1);\\
&p(2) = 2: \quad 2 = (1+1) = (2);\\
&p(3) = 3: \quad 3 = (1+1+1) = (2+1) = (3);\\
&p(4) = 5: \quad 4 = (1+1+1+1) = (2+1+1) = (2+2) = (3+1) = (4);\\
&p(5) = 7: \quad 5 = (1+1+1+1+1) = (2+1+1+1) = (2+2+1) = (3+1+1) =\\
&\qquad\qquad\quad = (3+2) = (4+1) = (5).
\end{aligned}$$

Кроме того, для удобства записи рекуррентных соотношений, связанных с числами $p(n)$, полагают, что $p(0) = 1$, $p(n) = 0$ в случае отрицательных целых n.

7.2.3. Как и задачу о наклейке марок на бандероль, задачу 7.2 можно свести к задаче о раскладке n неразличимых предметов по n различимым ящикам. Действительно, будем складывать в первый ящик единицы, то есть неразличимые предметы в любом количестве, во второй ящик будем складывать двойки, то есть неразличимые предметы, общее количество которых кратно двойке, и так далее. В этом случае любой способ раскладки ровно n неразличимых предметов по n таким ящикам дает нам некоторое разбиение заданного числа n и наоборот.

С формальной точки зрения это означает, что задачу 7.2 можно переформулировать следующим образом:

Задача 7.3. Найти количество всех решений в неотрицательных целых числах уравнения вида

$$y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + n \cdot y_n = n.$$

Такая задача, как мы уже понимаем, легко решается с помощью обыкновенных производящих функций. Комбинаторному действию, заключающемуся в укладке любого количества неразличимых предметов в первый ящик, отвечает производящая функция

$$\varphi_1(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Комбинаторному действию, состоящему в укладке четного числа неразличимых предметов во второй ящик, соответствует производящая функция

$$\varphi_2(z) = 1 + z^2 + z^4 + \ldots = \frac{1}{1-z^2}.$$

Наконец, комбинаторному действию, отвечающему раскладке n неразличимых предметов по n таким ящикам, соответствует произведение всех таких функций:

$$\varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^n)}.$$

7.2.4. Построенное выше решение обладает, однако, одним существенным недостатком — в этом решении явным образом присутствует параметр n. Нам же хочется получить решение, не зависящее от n. Оказывается, это можно сделать, записывая решение как формально бесконечное произведение вида

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1-z)} \frac{1}{(1-z^2)} \cdots \frac{1}{(1-z^n)} \cdots . \tag{39}$$

При этом для любого фиксированного n количество слагаемых с z^n будет, очевидно, конечным.

Решение задачи о разбиении заданного натурального числа n в виде бесконечного произведения (39) было получено впервые Леонардом Эйлером в сороковых годах восемнадцатого века.

7.3. С помощью обыкновенных производящих функций можно получать достаточно красивые результаты, связанные с разбиением числа n на слагаемые. В качестве характерного примера рассмотрим задачу о разбиении числа n в случае, когда любому числу позволяется входить в это разбиение не более одного раза.

7.3.1. Несложно понять, что производящая функция, описывающая количество таких разбиений, имеет следующий вид:

$$\varphi(z) = (1+z)(1+z^2)\dots(1+z^n)\dots$$

Известно, однако, что для любого натурального j

$$1+z^j = \frac{(1-z^{2j})}{(1-z^j)}.$$

Поэтому функцию $\varphi(z)$ можно переписать так:

$$\varphi(z) = \frac{(1-z^2)}{(1-z)}\frac{(1-z^4)}{(1-z^2)}\frac{(1-z^6)}{(1-z^3)}\dots\frac{(1-z^{2n})}{(1-z^n)}\dots$$

7.3.2. В числителе полученного выше выражения для $\varphi(z)$ стоят сомножители с четными степенями z. В бесконечном произведении они постепенно сокращаются с аналогичными сомножителями, стоящими в знаменателях этих дробей. Функция $\varphi(z)$ после таких сокращений записывается в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1-z)}\frac{1}{(1-z^3)}\frac{1}{(1-z^5)}\dots\frac{1}{(1-z^{2n-1})}\dots$$

Но такая производящая функция описывает количество разбиений n на слагаемые, каждое из которых является нечетным числом.

7.3.3. Таким образом, доказана следующая

Теорема 7.4. *Количество способов разбиения натурального числа n на слагаемые, при котором любое число входит в это разбиение не более одного раза, равно количеству разбиений n на нечетные слагаемые.*

Пример 7.5. В случае $n = 5$ имеется три разбиения, в которых любое число, меньшее или равное n, входит не более одного раза:

$$5 = (4+1) = (3+2) = (5).$$

Количество разбиений числа $n = 5$, содержащих только нечетные слагаемые, также равно трем:

$$5 = (1+1+1+1+1) = (3+1+1) = (5).$$

7.4. Заметим, что в задачах раскладки n неразличимых предметов по различимым ящикам (т.е. в задачах о *разложении* числа n на слагаемые) достаточно легко решался случай фиксированного числа k ящиков, и несколько сложнее — случай нефиксированного k.

Оказывается, в задачах раскладки n неразличимых предметов по неразличимым ящикам (т.е. в задачах о *разбиении* числа n на слагаемые) все обстоит ровно наоборот. Именно, мы в данном параграфе показали, что задачи о раскладке n неразличимых предметов по неразличимым ящикам в случае, когда количество k этих ящиков заранее не определено, решаются достаточно легко. Задачи же раскладки n неразличимых предметов по фиксированному числу k неразличимых ящиков оказываются более сложными. Технике решения таких задач посвящен следующий параграф.

8 Задачи раскладки n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам. Диаграммная техника

8.1. Напомним, что с первой главы за нами остался долг — мы не показали, как решать задачи о раскладке n неразличимых предметов по k неразличимым же ящикам. Основная задача данного параграфа — научиться, наконец, такие задачи решать.

8.1.1. Начнем мы со следующей задачи: предположим, что у нас имеется n неразличимых предметов и k неразличимых же ящиков, и мы хотим подсчитать количество раскладок этих предметов по ящикам при условии, что в каждом ящике находится хотя бы один предмет. Мы начинаем именно с такого способа раскладки потому, что эта задача эквивалентна чрезвычайно важной с практической точки зрения задаче о *разбиении* натурального числа n ровно на k положительных слагаемых.

Определение 8.1. Разбиением целого положительного числа n ровно на k слагаемых (или ровно на k частей) называется неупорядоченный набор, состоящий из фиксированного количества k целых положительных чисел x_i, $i = 1, \ldots, k$, сумма которых равна n.

Очевидно, что любое такое разбиение с формальной точки зрения представляет собой некоторое решение в целых положительных числах уравнения вида

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \tag{40}$$

при фиксированнных значениях n и k. Так как порядок слагаемых в правой части данного равенства роли не играет, то для определенности можно, например, считать, что числа x_i упорядочены по невозрастанию, то есть что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 1$.

Количество разбиений n ровно на k положительных слагаемых обозначается обычно через $p_k(n)$ по аналогии с количеством $p(n)$ *всех* разбиений натурального числа n на заранее не фиксированное количество положительных слагаемых. Очевидно, конечно же, что при этом

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(n) = p(n), \tag{41}$$

Приведем несколько примеров. Так как

$$5 = (4+1) = (3+2),$$

то количество $p_2(5)$ разбиений числа 5 ровно на два положительных слагаемых равно двум. Далее, так как

$$7 = (5+1+1) = (4+2+1) = (3+3+1) = (3+2+2),$$

то количество $p_3(7)$ разбиений числа 7 ровно на три положительных слагаемых равно четырем.

Несложно также понять, чему равно $p_k(n)$ для некоторых специальных случаев. Например, тривиальному случаю $k = 1$ отвечает единственное решение вида $x_1 = n$, поэтому $p_1(n) = 1$ для любого n. Ясно также, что $p_n(n) = 1$: разбиению любого числа n на n же частей соответствует единственное представление этого числа в виде суммы n единиц. Наконец, очевидно, что $p_k(n) = 0$ для любого $k > n$ — мы не можем разложить натуральное число на положительные слагаемые, количество которых строго больше этого числа n.

8.1.2. Перейдем теперь к еще одной, не менее важной задаче — задаче о раскладке n неразличимых предметов по k неразличимым же ящикам при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в каждом ящике. На языке теории разбиений такая схема раскладки соответствует разбиению целого неотрицательного числа n на *не более чем* k слагаемых.

Определение 8.2. Разбиением целого неотрицательного числа n на не более чем k слагаемых называется неупорядоченный набор, состоящий из k *неотрицательных* чисел x_i, $i = 1, \ldots, k$, сумма которых равна n:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \qquad x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k \geqslant 0.$$

Обозначим через $P_k(n)$ количество всех таких разбиений. Очевидно, что $P_1(n) = 1$. Кроме того, в данной задаче не исключен случай, когда в любом из k ящиков предметы отсутствуют (т.е. $n = 0$). Так как для любого k такой случай единственен, то число $P_k(0) = 1 \ \forall \ k \geqslant 0$.

Приведем несколько примеров описанных выше разложений. Так как

$$5 = (5) = (4 + 1) = (3 + 2),$$

то существует ровно три разбиения числа 5 на *не более чем два* слагаемых. Далее,

$$7 = (7) = (6+1) = (5+2) = (4+3) = (5+1+1) = (4+2+1) = (3+3+1) = (3+2+2),$$

поэтому $P_3(7) = 8$.

8.1.3. Числа $P_k(n)$ достаточно тесно связаны с числами $p_k(n)$ и $p(n)$. Так, для любого $k \geqslant n$ справедливо равенство

$$P_k(n) = p(n), \qquad k \geqslant n.$$

При $n = 0$ оно верно, так как по определению для любого $k \geqslant 0$ число $P_k(0) = 1 = p(0)$. Справедливость этого равенства при $n > 0$ очевидна — количество разбиений n на не более чем $k \geqslant n$ неотрицательных чисел совпадает с количеством разбиений ровно на n неотрицательных чисел, а оно, в свою очередь, совпадает с $p(n)$.

Далее, из определения чисел $P_k(n)$ и $p_k(n)$ следуют равенства

$$p_k(n) = P_k(n) - P_{k-1}(n) \qquad \text{и} \qquad P_k(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n), \tag{42}$$

связывающие эти числа при всех $n > 0$ и $k \geqslant 1$.

Наконец, числа $p_k(n)$ и $P_k(n)$ связаны следующим важным равенством:

$$p_k(n) = P_k(n-k) \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_k(n) = p_k(n+k). \tag{43}$$

Комбинаторное доказательство этого равенства достаточно элементарно. Действительно, предположим, что нам нужно разложить n неразличимых предметов по k неразличимым же ящикам так, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет. Разместим вначале в каждый из k ящиков ровно по одному предмету. После этого оставшееся количество предметов, равное $n-k$, мы можем произвольным образом разложить по k ящикам, и сделать мы это можем $P_k(n-k)$ количеством способов.

Итак, нам, в принципе, все равно, какие из чисел взять за основу — $p_k(n)$ или $P_k(n)$. Имея какие-то соотношения для $p_k(n)$, мы легко из них получим соответствующие соотношения для чисел $P_k(n)$ и наоборот.

8.1.4. Давайте теперь получим какие-то рекуррентные соотношения на числа $p_k(n)$.

Утверждение 8.3. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$p_k(n) = \sum_{i=1}^{m} p_i(n-k), \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1; \qquad m = \min\{k, n-k\}; \tag{44}$$

$$p_1(n) = p_n(n) = 1; \qquad\qquad p_k(n) = 0 \quad \textit{для любого } k > n.$$

Доказательство. Согласно (43),

$$p_k(n) = P_k(n-k).$$

Мы также знаем (см.(42)), что при $k \leqslant (n-k)$ справедливо равенство

$$P_k(n-k) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n-k).$$

В случае же $k > (n-k)$ мы в последней сумме должны ограничиться $(n-k)$ слагаемыми. □

8.1.5. Докажем еще одно полезное рекуррентное соотношение для чисел $p_k(n)$.

Утверждение 8.4. *Числа $p_k(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению вида*

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k). \tag{45}$$

Доказательство. С формальной точки зрения формула (45) является простым следствием утверждения 8.3. Такое доказательство предлагается провести в упражнении **??** к данному параграфу. Здесь же мы докажем рекуррентное соотношение (45) непосредственно из комбинаторных соображений.

Разобъем множество всех разбиений числа n на два блока.Поместим в первый блок все разбиения, в которые хотя бы один раз входит единица, а во второй — разбиения, в которые единица не входит. Для всех разбиений из первого блока эту единицу всегда можно поставить на последнее, k-е место. На оставшихся $k-1$ позициях может стоять любое из $p_{k-1}(n-1)$ разбиений числа $(n-1)$ на $(k-1)$ частей. Ясно, что количество таких разбиений равно $p_{k-1}(n-1)$.

Любое разбиение из второго блока свободно от единиц — все слагаемые x_i в разложении (40) числа n на k частей строго больше единицы. Вычитая из каждого такого слагаемого единицу, мы получим какое-то разбиение числа $(n-k)$ на k частей. Верно и обратное — любое из $p_k(n-k)$ таких разбиений можно превратить в разбиение числа n, свободное от единиц. Следовательно, количество разбиений из второго блока совпадает с количеством всех разбиений числа $(n-k)$ на k частей, т.е. равно $p_k(n-k)$. □

8.1.6. Комбинаторные доказательства равенств вида (43) или (45) можно сделать значительно более наглядными с помощью так называемой *диаграммной техники.*

Определение 8.5. Диаграммой Ферре называется следующее графическое представление любого разбиения числа n:

- каждый член разбиения (любое слагаемое x_i) представляется в виде строки, состоящей из соответствующего количества точек;

- указанные строки располагаются в порядке невозрастания, выравненными по левому краю диаграммы.

Приведем несколько характерных примеров диаграмм Ферре:

$$n = 12 = 4 + 4 + 3 + 1 : \qquad \begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & \end{array}$$

$$n = 5 = 3 + 2 : \qquad \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array}$$

Иногда удобно вместо точек рисовать квадраты. Такое графическое представление называется диаграммой Юнга.

8.1.7. Покажем теперь, как можно с помощью диаграмм Ферре несколько более наглядно доказать, к примеру, равенство (43), т.е. доказать, что количество $P_k(n)$ разбиений числа n на не более чем k слагаемых равно количеству способов разбиения $n + k$ ровно на k слагаемых.

Рассмотрим для этого произвольную диаграмму Ферре, изображающую разбиение числа n на не более чем k слагаемых:

$$\text{пусть } n = 10,\ k = 4,\ n = 10 = 5 + 4 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & & \\ \circ & & & & \end{array} \right.$$

Как видно из примера, такая диаграмма состоит из $n = 10$ точек (символы $\bullet$), расположенных в не более чем $k = 4$ строках. Для наглядности в примере последняя, пустая строка заполнена символом $\circ$.

Теперь сделаем следующее: добавим к этой диаграмме столбец, состоящий ровно из k точек:

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & & \\ \circ & & & & \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{llllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \circ & & & & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{llllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & \end{array}$$

В результате получаем диаграмму Ферре, состоящую ровно из $n + k$ точек и содержащую хотя бы один столбец длины k. Но такая диаграмма как раз и изображает разбиение числа $n + k$ ровно на k частей.

Обратно, удаляя из любой диаграммы Ферре, изображающей разбиение числа $k + n$ ровно на k частей, первый столбец, мы получаем диаграмму, соответствующую какому-то разбиению числа n на не более чем k частей.

Итак, с помощью диаграмм Ферре мы установили взаимно-однозначное соответствие между множеством разбиений числа n на не более чем k частей и множеством разбиений числа $n + k$ ровно на k частей, а следовательно, еще раз доказали равенство (43).

8.1.8. Описанная при доказательстве (43) техника, опирающаяся на работу с диаграммами Ферре, довольно часть используется в теории разбиений. Она позволяет сделать более наглядными комбинаторные рассуждения, а следовательно, и упростить решения многих задач из области теории разбиений. Ряд характерных примеров такого рода рассуждений предлагается проделать в упражнениях **??**–**??** к данному параграфу.

8.2. Перейдем теперь к построению производящих функций для чисел $p_n(k)$ и $P_n(k)$.

8.2.1. При построении таких функций весьма полезным оказывается понятие так называемой *двойственной диаграммы Ферре.* По определению, любую диаграмму Ферре мы читаем по строкам, понимая при этом, что любой строке отвечает некоторая часть разбиения заданного числа n. Однако ту же диаграмму мы можем читать и по столбцам, то есть мы можем трактовать уже любой столбец как некоторую часть разбиения. С формальной точки зрения это означает, что мы любому разбиению заданного числа n на k частей можем взаимно-однозначно сопоставить некоторое разбиение этого же числа n, описывающееся диаграммой Ферре, полученной из исходной поворотом на $90°$ по часовой стрелке и приведением к нормальному виду (или отражением этой диаграммы относительно вертикальной оси). Такая диаграмма Ферре и называется диаграммой, двойственной к исходной.

Пример 8.6. Пусть $n = 10 = 5+4+1$. Указанному разбиению отвечает диаграмма Ферре вида

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & & \end{array}$$

Повернем эту диаграмму Ферре на $90°$ и приведем полученную диаграмму к нормальному виду:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & & \end{array} \quad \curvearrowright \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & & \bullet \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

Полученная в результате этих операций двойственная диаграмма Ферре описывает уже некоторое другое разбиение этого же числа $n = 10$, а именно, разбиение вида $n = 10 = 3+2+2+2+1$.

8.2.2. Рассмотрим теперь диаграмму Ферре для числа n, состоящую из не более чем k строк. Двойственная к ней диаграмма описывает разбиение числа n на части, в котором любая часть не превосходит k.

Так, в примере 8.6 разбиению $n = 10$ вида $10 = 5 + 4 + 1$ на не более чем 3 части отвечает двойственное разбиение этого же числа вида $10 = 3 + 2 + 2 + 2 + 1$, любая часть которого не превосходит трех.

Тем самым, справедливо следующее

Утверждение 8.7. *Количество $P_k(n)$ разбиений n на не более чем k частей равно количеству разбиений n на части, любая из которых не превосходит k.*

Теперь заметим, что любое разбиение n на части, в котором любая часть не превосходит заданного числа k, можно трактовать как одно из решений в целых неотрицательных числах уравнения вида

$$1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + k \cdot y_k = n, \qquad y_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Но количество всех решений такого рода уравнений мы умеем находить — оно описывается обыкновенной производящей функцией вида

$$F_k(z) = (1 + z + z^2 + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots)\ldots(1 + z^k + z^{2k} + \ldots) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^k)}.$$

Как следствие, мы доказали, что $F_k(z)$ является производящей функцией для количества $P_k(n)$ разбиений n на k неотрицательных слагаемых. Иными словами, эта функция описывает количество раскладок n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в любом ящике.

8.2.3. Перейдем теперь к диаграмме Ферре, содержащей ровно k строк, т.е. диаграмме, описывающей разбиение n ровно на k частей. Двойственная к ней диаграмма описывает разбиение n на части, в котором хотя бы одна часть гарантированно равна k, а все остальные части разбиения не превосходят k.

Так, в примере 8.6 разбиению $n = 10 = 5 + 4 + 1$ отвечает двойственное разбиение $n = 10 = 3 + 2 + 2 + 2 + 1$, содержащее одну часть, в точности равную $k = 3$. Остальные части это число $k = 3$ не превосходят.

Иными словами, с использованием понятия двойственной диаграммы Ферре мы доказали следующее

Утверждение 8.8. *Количество $p_k(n)$ разбиений числа n ровно на k слагаемых равно количеству разбиений n на части, не превосходящие k, в котором одна из частей обязательно равна k.*

Но любое разбиение n на части, не превосходящие k, содержащее хотя бы одно слагаемое, равное k, на формальном языке можно рассматривать как решение в целых числах уравнения вида

$$1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + k \cdot y_k = n, \qquad y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0, \quad \ldots \quad y_{k-1} \geqslant 0, \quad y_k \geqslant 1.$$

Количество решений такого рода уравнений описывается обыкновенной производящей функцией

$$f_k(z) = (1 + z + z^2 + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots) \ldots (1 + z^{k-1} + z^{2k-2} + \ldots)(z^k + z^{2k} + \ldots) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad f_k(z) = \frac{z^k}{(1 - z)(1 - z^2) \ldots (1 - z^k)}.$$

Тем самым, $f_k(z)$ является производящей функцией для количества $p_k(n)$ разбиений n на k положительных слагаемых, или, на другом языке, она является производящей функцией для количества раскладок n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам при условии, что в каждый ящик нам следует положить хотя бы один предмет.

8.3. В заключение данного параграфа вернемся к производящей функции $f(z)$ для количества $p(n)$ разбиений

$$f(z) = \frac{1}{(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3) \ldots} =: \frac{1}{Q(z)}$$

и вслед за Л.Эйлером рассмотрим поподробнее стоящую в знаменателе функцию

$$Q(z) = (1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3) \ldots$$

После перемножения первых 22 скобок Эйлер получил следующий результат:

$$Q(z) = (1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + z^{22} + \ldots)(1 - z^{23})(1 - z^{24}) \ldots$$

Видно, что при умножении первой скобки на $(1 - z^{23})(1 - z^{24}) \ldots$ будут меняться лишь коэффициенты при степенях z, больших, чем 22. Коэффициенты же при степенях z, меньших или равных 22, меняться уже не будут — произойдет, как говорят, стабилизация коэффициентов в этом произведении. Эйлер заметил, что после стабилизации коэффициенты при этих степенях оказываются равными 0, 1 или -1, причем коэффициенты 1 и -1 попарно чередуются: после двух минус единиц идут две единицы и так далее. После долгих экспериментов Эйлер установил следующее правило чередования этих коэффициентов:

$$Q(z) = 1 + \sum_{d=1}^{+\infty} (-1)^d \left(z^{\frac{3d^2-d}{2}} + z^{\frac{3d^2+d}{2}}\right). \tag{46}$$

Числа

$$\omega(d) := \frac{3d^2 - d}{2} = \sum_{i=0}^{d-1} (3i+1) \qquad \text{и} \qquad \omega(-d) = \frac{3d^2+d}{2}, \qquad d = 1, 2, \ldots$$

в этой формуле носят название *пентагональных чисел,* так как они описывают вложенные друг в друга пятиугольники, построенные на 1, $1 + 4 = 5$, $1 + 4 + 7 = 12$, $1 + 4 + 7 + 10 = 22$ и так далее точках (см.рис.6).

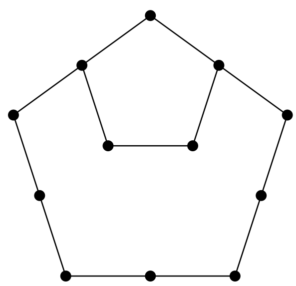


Рис. 6

Комбинаторно формула (46) была доказана лишь в 1881 году американским математиком Фабианом Франклином. Мы приведем здесь это доказательство — отчасти ввиду его красоты, а отчасти для того, чтобы еще раз продемонстрировать полезность использования диаграмм Ферре при доказательстве утверждений, связанных с разбиениями чисел.

8.3.1. Прежде всего заметим, что $Q(z)$ очень похожа на функцию

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\ldots,$$

описывающую разбиение числа n на *различные* слагаемые (части). Однако, в отличие от этой функции, в $Q(z)$ любое слагаемое, получающееся после перемножения скобок, может входить как со знаком плюс, так и со знаком минус. Давайте поймем, когда какой знак получается.

Очевидно, что знак плюс получается в случае, когда нетривиальных (то есть отличных от единицы) сомножителей в произведении четное число. В случае нечетного числа таких сомножителей мы получаем знак минус. С точки зрения разбиения числа n на части это можно трактовать следующим образом. Если n разбивается на четное число частей (например, $n = 12 = 5 + 4 + 2 + 1$), то коэффициент при z^n имеет знак плюс (для приведенного выше примера имеем $(-z^5)(-z^4)(-z^2)(-z^1) = z^{12}$). Если же n разбивается на нечетное число частей, то коэффициент при z^n имеет знак минус (так, для разбиения $n = 12 = 6 + 4 + 2$ получаем $(-z)^6(-z)^4(-z)^2 = -z^{12}$).

Для подсчета общего количества таких разбиений мы складываем коэффициенты при одинаковых степенях z. Тогда равенство нулю коэффициента при z^n в функции $Q(z)$ означает, что количество разбиений заданного числа n на четное и нечетное число частей совпадает. Иными словами, теорема Эйлера (46) утверждает, что почти всегда (то есть почти для любых n) количество разбиений n на четное число частей совпадает с количеством разбиений n на нечетное число частей. При этом, однако, существуют исключительные числа n, а именно, пентагональные числа $n = \omega(d)$ и $n = \omega(-d)$, для которых количество четных разбиений на единицу отличается от количества нечетных разбиений.

Все, что нам осталось — это строго доказать все эти утверждения.

8.3.2. Рассмотрим для этого диаграмму Ферре любого разбиения числа n на различное число частей:

$$\begin{array}{lllllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & & & & & \end{array}$$

Заметим, что любая такая диаграмма состоит из некоторого количества поставленных друг на друга трапеций (на рисунке имеем две таких трапеции). Обозначим через l длину самой нижней строчки диаграммы Ферре (то есть l есть наименьшая часть разбиения числа n), а через d — длину ее “верхней диагонали”, то есть количество строк в самой верхней трапеции диаграммы Ферре. Для диаграммы Ферре, представленной на рисунке, $l = 2$, $d = 3$.

Разобьем теперь все множество таких диаграмм Ферре на блоки в зависимости от количества входящих в них трапеций, а также в зависимости от конкретных значений параметров l и d. В первый блок включим все диаграммы Ферре, состоящие из двух и более трапеций, у которых $d \geqslant l$, а также диаграммы Ферре, состоящие из одной трапеции, у которой $d > l$. К этому блоку принадлежит диаграмма Ферре, отвечающая приведенному выше примеру разбиения числа $n = 23 = 7+6+5+3+2$ на $k = 5$ различных частей, равных 7, 6, 5, 3 и 2. Еще один пример — это диаграмма Ферре

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

отвечающая разбиению числа $n = 13$ вида $n = 13 = 5+4+3+2$.

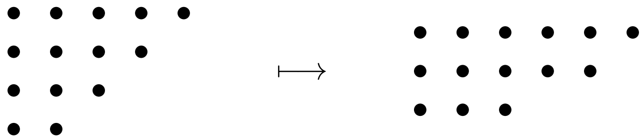
Во второй блок включим диаграммы, состоящие из не менее чем двух трапеций, у которых $d \leqslant l-1$, а также диаграммы, состоящие из одной трапеции, у которых $d < l-1$.

Наконец, в третий блок включим диаграммы Ферре для двух оставшихся типов разбиений, а именно, диаграммы, состоящие из одной трапеции, у которых $d = l$ или $d = l-1$.

Заметим теперь, что любую диаграмму, принадлежащую к первому блоку, можно перевести в диаграмму, принадлежащую ко второму блоку, следующим преобразованием. Возьмем диаграмму Ферре из первого блока, отрежем от этой диаграммы нижнюю строку и “приклеим” ее к верхней трапеции:

$$\begin{array}{lllllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & & & & & \end{array} \qquad \longmapsto \qquad \begin{array}{llllllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \end{array}$$

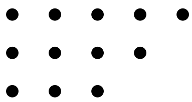
Еще один пример:



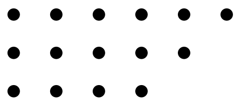
Полученные в результате такого преобразования диаграммы Ферре принадлежат, очевидно, второму блоку. Обратно, беря любую диаграмму Ферре из второго блока, отрезая от нее верхнюю диагональ и приклеивая ее под нижней строкой, мы получаем диаграмму Ферре, принадлежащую к первому блоку. Тем самым мы показали, что количество разбиений заданного числа n, принадлежащих к первому блоку, в точности совпадает с количеством разбиений n, принадлежащих ко второму блоку.

Заметим теперь, что в результате любого из таких преобразований четность разбиения числа n меняется на противоположную. Так, в первом примере разбиение $n = 23 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2$, состоящее из нечетного числа различных слагаемых, превращается в разбиение $n = 23 = 8 + 7 + 5 + 3$, содержащее четное число различных слагаемых. Как следствие, отвечающие этим парам разбиений слагаемые в $Q(z)$ взаимно сокращаются.

Перейдем теперь к диаграммам Ферре из третьего блока, то есть к диаграммам вида



или



Эти диаграммы характеризуются тем, что они не допускают описанных выше преобразований. От них нельзя отрезать нижнюю строку и приклеить ее справа от трапеции. Кроме того, нельзя отрезать от такой диаграммы верхнюю диагональ и приклеить ее под нижней строкой — мы либо не получим диаграмму Ферре, либо получим диаграмму Ферре разбиения, в котором два слагаемых совпадают, а это нас также не устраивает. Иными словами, эти диаграммы не допускают парных им диаграмм, описывающих разбиение заданного числа с противоположной четностью.

Подсчитаем количество точек в этих диаграммах. В диаграммах, состоящих из одной трапеции, у которых $d = l$, количество точек равно

$$l + (l + 1) + \ldots + (l + (d - 1)) = d + (d + 1) + \ldots + (2d - 1) = d \cdot \frac{3d - 1}{2}.$$

В диаграммах, состоящих из одной трапеции, для которых выполнено равенство $d = l - 1$, имеем

$$l + (l + 1) + \ldots + (l + (d - 1)) = (d + 1) + (d + 2) + \ldots + 2d = d \cdot \frac{3d + 1}{2}.$$

Следовательно, только числа $n(d) = d \cdot (3d \pm 1)/2$ допускают разбиения указанного вида

$$n(d) = d + (d + 1) + \ldots + (2d - 1) \qquad \text{или} \qquad n(d) = (d + 1) + (d + 2) + \ldots + 2d,$$

причем для любого такого $n(d)$ соответствующая этому разбиению диаграмма Ферре единственна.

Как следствие, в случае $n = n(d)$ и $d = 2m$ (т.е. четного d) количество разбиений n на четное число частей будет на единицу больше количества разбиений этого же числа на нечетное число частей. Поэтому соответствующий этому $n(d)$ коэффициент при $z^{n(d)}$ в разложении $Q(z)$ по степеням z будет равен плюс единице. В случае $n = n(d)$ и $d = 2m+1$ (т.е. нечетного d) количество разбиений n на нечетное число частей будет на единицу больше количества разбиений на четное число частей. Это приводит к тому, что коэффициент при $z^{n(d)}$ в разложении $Q(z)$ будет равен минус единице. Наконец, в случае $n \neq n(d)$ количество разбиений n на четное число частей будет совпадать с количеством разбиений n на нечетное число частей. Как следствие, для всех таких n соответствующие им степени z^n в функции $Q(z)$ сокращаются. Теорема доказана.

8.3.3. Формула (46) позволяет получить довольно удобное рекуррентное соотношение для чисел $p(n)$. Действительно, производящая функция $f(z)$ для этих чисел равна

$$f(z) = \frac{1}{Q(z)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(z) \cdot Q(z) = 1,$$

$$f(z) = p(0) + p(1)z + p(2)z^2 + \ldots + p(n)z^n + \ldots, \qquad Q(z) = 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + z^{22} + \ldots$$

Перемножая теперь эти ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем следующее рекуррентное соотношение для чисел $p(n)$:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - \ldots$$

Пользуясь им, можно достаточно быстро вычислять значения $p(n)$ для не слишком больших значений n.

9 Композиция экспоненциальных производящих функций

9.1. Вернемся к операции композиции производящих функций. Во втором параграфе данной главы мы ввели крайне важную и полезную операцию композиции $h(z) = g(f(z))$ обыкновенных производящих функций.

9.1.1. Именно, мы взяли более-менее произвольную обыкновенную производящую функцию

$$f(z) = 0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

(единственное требование к ней состояло в том, чтобы ее коэффициент $a_0 = 0$), а также очень специальную функцию

$$g(z) = 1 + 1 \cdot z + 1 \cdot z^2 + \ldots + 1 \cdot z^n + \ldots = \frac{1}{1-z},$$

все коэффициенты которой равны единице, а затем поставили в функции $g(z)$ вместо z обыкновенную производящую функцию $f(z)$. В результате мы получили функцию вида

$$g(f(z)) = 1 + 1 \cdot f(z) + 1 \cdot f^2(z) + \ldots + 1 \cdot f^k(z) + \ldots = \frac{1}{1 - f(z)}.$$

Подставляя теперь вместо $f(z)$ соответствующий ей формальный степенной ряд, возводя этот ряд в степени k, $k \geqslant 1$, и собирая коэффициенты при z^n, мы получили обыкновенную производящую функцию

$$h(z) = c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \ldots + c_n \cdot z^n + \ldots,$$

коэффициенты c_n которой имеют следующий комбинаторный смысл: это есть количество способов разложить n неразличимых предметов по заранее не фиксированному количеству k различимых ящиков, а затем над i предметами, попавшими в конкретный ящик, совершить a_i количеством способов комбинаторные действия, описывающиеся функцией $f(z)$.

Задача данного параграфа — научиться совершать похожие комбинаторные действия, но уже над различимыми предметами. Для этого, как мы уже знаем, нам вместо обыкновенных нужно будет, по всей видимости, работать с экспоненциальными производящими функциями. Действуя по аналогии, нам нужно будет взять экспоненциальную производящую функцию

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

а также экспоненциальную производящую функцию

$$G(z) = 1 + 1\cdot\frac{z^1}{1!} + 1\cdot\frac{z^2}{2!} + \ldots + 1\cdot\frac{z^n}{n!} + \ldots = \exp(z),$$

все коэффициенты которой равны единице, подставить вместо z в $G(z)$ экспоненциальную функцию $F(z)$, собрать коэффициенты при $z^n/n!$ и в полученной экспоненциальной производящей функции

$$H(z) = G(F(z)) = 1 + \frac{F(z)}{1!} + \frac{F^2(z)}{2!} + \ldots + \frac{F^k(z)}{k!} + \ldots = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

объяснить комбинаторный смысл коэффициентов c_n.

9.1.2. Давайте приступим к осуществлению намеченного нами плана. Возьмем для этого произвольную экспоненциальную функцию

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой описывают количество способов совершить какое-то комбинаторное действие над n-элементным множеством X. Как мы знаем, произведению k экземпляров этой функции $F(z)$ отвечает экспоненциальная функция

$$\widetilde{H}_k(z) = [F(z)]^k,$$

коэффициенты при $z^n/n!$ которой описывают нам количество способов совершить следующие комбинаторные действия: взять n различимых предметов, разложить их по *фиксированному* числу k *различимых* ящиков, а затем над i предметами, попавшими в конкретный ящик, совершить комбинаторное действие, описывающееся функцией $F(z)$, a_i количеством способов.

Предположим теперь, что мы хотим раскладывать предметы по заранее не фиксированному количеству ящиков. Иными словами, мы хотим раскладывать предметы или по одному, или по двум, или по трем и так далее количеству ящиков. Как мы с вами знаем, слову "или" в комбинаторике отвечает операция сложения производящих функций, отражающая, в свою очередь, комбинаторное правило сложения. Суммируя тогда функции $\widetilde{H}_k(z)$ по k, мы получим производящую функцию

$$\widetilde{H}(z) = 1 + F(z) + F^2(z) + \ldots + F^k(z) + \ldots = \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1\frac{z^1}{1!} + \widetilde{c}_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + \widetilde{c}_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты $\widetilde{c}_n$ которой описывают количество способов совершить такие комбинаторные действия: взять n различимых предметов, разложить их по *заранее не фиксированному* числу k *различимых* ящиков, а затем совершить над i предметами, попавшими в конкретный ящик, комбинаторное действие, описывающееся функцией $F(z)$, a_i количеством способов.

При таком переходе, однако, мы сразу же должны наложить дополнительное ограничение на функцию $F(z)$ — как и в аналогичном случае обыкновенной производящей функции $f(z)$, коэффициент a_0 у функции $F(z)$ обязан равняться нулю. Действительно, с формальной точки зрения неравенство $a_0 \neq 0$ означает, что для любого k функция

$$F^k(z) = \left[a_0 + a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots\right]^k$$

будет давать вклад в коэффициент при $z^n/n!$ для любого значения параметра n. Но слагаемых вида $F^k(z)$ бесконечно много, поэтому и коэффициенты при $z^n/n!$ будут бесконечно большими для любого значения параметра n. С комбинаторной же точки зрения неравенство $a_0 \neq 0$ означает, что мы можем совершать какие-то нетривиальные комбинаторные действия и над ящиками, в которые у нас не попал ни один предмет. Но таких ящиков к любой раскладке n различимых предметов мы можем добавить сколько угодно. Поэтому в случае $a_0 \neq 0$ мы получаем бесконечное количество способов разложить n предметов по ящикам, а это нас не устраивает. Итак, для корректного перехода от фиксированного количества ящиков к произвольному мы должны полагать коэффициент $a_0 = 0$.

9.1.3. Заметим теперь, что мы изначально хотели получить не функцию $\widetilde{H}(z)$, а функцию

$$H(z) = G(F(z)) = 1 + \frac{F(z)}{1!} + \frac{F^2(z)}{2!} + \ldots + \frac{F^k(z)}{k!} + \ldots = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

то есть функцию, у которой вместо слагаемых вида $F^k(z)$ присутствуют слагаемые вида $F^k(z)/k!$. Для того, чтобы понять разницу в этих двух функциях, вернемся на шаг назад и рассмотрим раскладку n предметов по *фиксированному* количеству k ящиков. Обозначим через $H_k(z)$ экспоненциальную производящую функцию, коэффициенты при $z^n/n!$ которой описывают количество способов разложить n различимых предметов по неразличимым ящикам, а затем совершить над i предметами, попавшими в конкретный ящик, комбинаторные действия, описывающиеся функцией $F(z)$, a_i количеством способов. Утверждается, что $H_k(z)$ связана с функцией $F(z)$ равенством

$$H_k(z) \cdot k! = F^k(z).$$

Действительно, любую совокупность из k неразличимых ящиков мы можем $k!$ способами разметить, превратив их в k помеченных ящиков. Для этого нам нужно рассмотреть наряду с k неразличимыми предметами множество из k различимых пометок. Выбирая из этого множества k способами первую пометку и наклеивая ее на один из k неразличимых ящиков, мы получим различимый ящик. Выбирая вторую пометку из оставшегося $(k-1)$-элементного множества пометок и наклеивая ее на еще один неразличимый ящик, мы получим второй различимый ящик. Продолжая далее, мы в конце концов получим k различимых ящиков, и получаем мы их, таким образом, $k!$ способами. Но тогда, согласно комбинаторному правилу произведения, производящая функция вида $H_k(z) \cdot k!$ даст нам количество способов разложить n различимых предметов уже по k различимым ящикам, а это количество способов и описывается функцией $F^k(z)$.

Теперь становится понятным комбинаторный смысл экспоненциальной производящей функции

$$H(z) = 1 + H_1(z) + H_2(z) + \ldots + H_k(z) + \ldots$$

Именно, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 9.1 (Экспоненциальная формула). *Пусть a_n есть количество способов совершить какое-то комбинаторное действие над элементами n-элементного множества X, причем количество a_0 способов совершить это действие над пустым множеством равно нулю. Пусть c_n есть количество способов разбить n-множество X на* заранее не фиксированное *число k* непустых неразличимых *блоков, а затем совершить над элементами каждого такого блока размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами. Тогда соответствующая этим c_n экспоненциальная производящая функция*

$$H(z) = c_0 + c_1 \frac{z^1}{1!} + c_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

связана с экспоненциальной производящей функцией

$$F(z) = a_1 \frac{z^1}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

следующим формальным соотношением:

$$H(z) = 1 + \frac{F(z)}{1!} + \frac{[F(z)]^2}{2!} + \ldots + \frac{[F(z)]^k}{k!} + \ldots =: \exp(F(z)). \tag{47}$$

Соотношение (47) носит название *экспоненциальной формулы.*

9.1.4. В качестве важного примера рассмотрим задачу о раскладке различимых предметов по ящикам. Напомним, что в такого рода задачах мы вводили экспоненциальную производящую функцию

$$F(z) = a_0 + a_1 \frac{z^1}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой имели следующий комбинаторный смысл: $a_n = 1$, если мы можем положить n различимых предметов в ящик, и $a_n = 0$, если нам это делать запрещено. Для такой производящей функции $F(z)$ экспоненциальная формула (47) решает, очевидно, следующую задачу: подсчитать количество всевозможных способов раскладки n различимых предметов по *заранее не фиксированному* числу k *неразличимых* ящиков. При этом мы обязательно должны потребовать, чтобы коэффициент a_0 при z^0 у функции $F(z)$ всегда был равен нулю. С комбинаторной точки зрения это означает, что в любом из k ящиков у нас должен находиться хотя бы один предмет.

Важным частным случаем данной задачи является задача о раскладке n различимых предметов по ящикам в случае, когда в каждый ящик мы можем складывать любое количество предметов, отличных от нуля. В этом случае все коэффициенты a_n, $n > 0$, равны единице, а количество способов раскладки описывает производящая функция вида

$$B(z) := \exp(\exp(z) - 1) = B_0 + B_1 z + B_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + B_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Коэффициенты B_n при $z^n/n!$ у этой функции есть не что иное, как числа Белла, описывающие количество способов разбиения n-элементного множества на непустые неупорядоченные блоки.

9.1.5. Напомним, что в первой главе из элементарных комбинаторных соображений нами было получено рекуррентное соотношение для вычисления чисел Белла B_n:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i. \tag{48}$$

Оказывается, что с помощью экспоненциальной формулы (47) мы можем достаточно просто получить подобного рода формулы и для произвольной функции $F(z)$.

Продифференцируем для этого равенство $H(z) = \exp(F(z))$ по z:

$$H'(z) = \exp(F(z)) \cdot F'(z) = H(z) \cdot F'(z) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$c_1 + c_2\frac{z}{1!} + \ldots + c_{n+1}\frac{z^n}{n!} + \ldots = \Big(c_0 + c_1\frac{z}{1!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots\Big)\Big(a_1 + a_2\frac{z}{1!}z + \ldots + a_{n+1}\frac{z^n}{n!} + \ldots\Big).$$

Перемножая стоящие справа производящие функции, получаем рекуррентные соотношения для нахождения коэффициентов c_n по числам a_n:

$$c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i+1}c_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i a_{n+1-i}. \tag{49}$$

Подставляя, в частности, в эту формулу значения $a_n = 1 \ \forall\ n > 0$, мы из (49) получаем рекуррентное соотношение (48).

В дальнейшем нам понадобятся и обратные рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять коэффициенты a_n производящей функции $F(z)$ по известным коэффициентам c_n. Для получения таких соотношений достаточно выразить из формулы (49) коэффициенты a_{n+1}. В результате получаются равенства вида

$$a_{n+1} = \frac{1}{c_0}\left[c_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} c_i a_{n+1-i}\right]. \tag{50}$$

9.1.6. В качестве важного примера использования полученной выше формулы (50) подсчитаем количество $g_n^{(c)}$ всех односвязных графов, построенных на n вершинах.

Любой простой граф G представляет собой объединение некоторого числа k своих связных компонент. Поэтому для получения всех простых графов на n вершинах нам нужно совершить следующие комбинаторные действия: разбить n-множество вершин на заранее не фиксированное число k непустых неупорядоченных блоков и построить на любом из таких блоков размером i_m связной простой граф $g_{i_m}^{(c)}$ количеством способов. Иными словами, производящая функция

$$G(z) = 1 + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 8 \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots + 2^{\binom{n}{2}} \cdot \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

для количества g_n всех простых графов и производящая функция

$$G^{(c)}(z) = 0 + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + 4 \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots + g_n^{(c)} \cdot \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

для количества $g_n^{(c)}$ всех связных простых графов, согласно комбинаторному смыслу формулы (47), связаны между собой следующим равенством:

$$G(z) = \exp(G^{(c)}(z)).$$

Теперь, зная количество $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ всех простых графов на n вершинах, мы можем записать следующее рекуррентное соотношение для подсчета количества $g_n^{(c)}$ всех связных графов:

$$g_{n+1}^{(c)} = g_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} g_i\, g_{n+1-i}^{(c)} = 2^{\binom{n+1}{2}} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^{\binom{i}{2}}\, g_{n+1-i}^{(c)}.$$

9.2. Экспоненциальную формулу $H(z) = G(F(z))$, в которой функция $G(z) = \exp(z)$, достаточно легко обобщить на случай произвольной функции

$$G(z) = b_0 + b_1\frac{z^1}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

9.2.1. Именно, предположим, что мы не просто хотим разбить n-множество U на заранее не определенное число k блоков, а еще и совершить над самими этими блоками какое-то другое комбинаторное действие b_k способами. При фиксированном k мы бы получили, что количество c_n способов совершить все эти операции определялось бы коэффициентом при $z^n/n!$ в произведении вида $b_k[F(z)]^k/k!$. В случае же, когда k заранее не фиксировано, количество c_n способов совершить эти действия определяется как коэффициент при $z^n/n!$ в разложении функции

$$b_0 + b_1\frac{F(z)}{1!} + b_2\frac{[F(z)]^2}{2!} + \ldots + b_k\frac{[F(z)]^k}{k!} + \ldots =: G(F(z)) \tag{51}$$

по степеням z.

Таким образом, мы можем сформулировать следующее

Определение 9.2. Композицией $H(z) = G(F(z))$ пары экспоненциальных производящий функций $F(z)$ и $G(z)$ называется экспоненциальная производящая функция

$$H(z) = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты c_n которой определяются как коэффициенты при $z^n/n!$ в разложении (51) по степеням z и имеют следующий комбинаторный смысл: c_n есть количество способов разбить n-элементное множество на *заранее не определенное* число k *непустых неразличимых* блоков, совершить над элементами каждого блока размером i_m первое комбинаторное действие a_{i_m} числом способов, а затем совершить над самими этими блоками второе комбинаторное действие b_k способами.

9.2.2. При выводе экспоненциальной формулы (47) мы предполагали, что получающиеся в процессе разбиения блоки являются неразличимыми. Достаточно очевидно, как решать аналогичную задачу в случае, когда блоки являются различимыми — в данном случае мы вместо функции $G(z) = \exp(z)$ должны рассматривать функцию вида $G(z) = 1/(1-z)$. Действительно, согласно комбинаторному смыслу сложения и умножения экспоненциальных производящих функций, формула вида

$$1 + F(z) + F^2(z) + \ldots + F^k(z) + \ldots = \frac{1}{1-F(z)}, \qquad \text{где} \qquad F(z) = a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

описывает нам следующие комбинаторные действия: разбить n-элементное множество на *заранее не фиксированное* число k *непустых различимых* блоков, а затем совершить над элементами каждого такого блока размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами.

Эта же самая формула допускает, однако, и несколько иную комбинаторную интерпретацию. Действительно, вернемся к общей композиционной формуле (51) и положим в ней коэффициенты $b_k = k!$. С комбинаторной точки зрения это можно трактовать следующим образом: разбить n-элементное множество на *заранее не фиксированное* число k *непустых неразличимых* блоков, совершить над элементами любого такого блока размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами, а затем *линейно упорядочить* полученные блоки.

На практике довольно часто встречается также случай, когда коэффициенты $b_k = (k-1)!$ при всех $k > 0$, $b_0 = 1$. С комбинаторной точки зрения такой выбор коэффициентов b_k означает, что мы *циклически* упорядочиваем блоки, получающиеся после разбиения n-множества U. Соответствующая этому случаю производящая функция $H(z)$ может быть записана в таком виде:

$$H(z) = 1 + F(z) + \frac{F^2(z)}{2} + \ldots + \frac{F^n(z)}{n} + \ldots = 1 + \ln\frac{1}{1-F(z)}.$$

Здесь через $\ln(1/(1-z))$ по аналогии с математическим анализом обозначен формальный степенной ряд вида

$$z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots =: \ln\frac{1}{1-z}.$$

9.2.3. Формула (51) позволяет нам записать решения целого класса комбинаторных задач, связанных с разбиением множества различимых предметов на заранее не определенное количество блоков, в довольно компактном и красивом виде. Нам бы хотелось, однако, наряду с такого рода красивыми формулами иметь и удобные рекуррентные соотношения, позволяющие нам быстро сосчитать по заданным коэффициентам a_n и b_k производящих функций $F(z)$ и $G(z)$ соответствующие коэффициенты c_n при $z^n/n!$ формального степенного ряда $H(z)$. Решению этой задачи, а также поиску явных выражений для коэффициентов c_n, посвящен следующий параграф.

10 Формула Фаа ди Бруно. Полиномы Белла

10.1. Вернемся к композиционной формуле

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots, \qquad G(z) = b_0 + b_1\frac{z^1}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

описывающей количество способов разбить n-элементное множество U на заранее не фиксированное количество k непустых неразличимых блоков, совершить внутри каждого блока размером i_m первое комбинаторное действие a_{i_m} числом способов, а затем над самими блоками совершить второе комбинаторное действие b_k числом способов. Наша первая задача состоит в получении явных формул для коэффициентов c_n экспоненциальной производящей функции $H(z)$.

10.1.1. Начнем мы, как всегда, с нескольких простых примеров.

Пример 10.1. Предположим, что в помещении находится четное число $n = 2k$ человек. Мы хотим разбить этих людей на пары, совершить над каждой из этих пар какое-то комбинаторное действие a_2 способами, а затем совершить над всеми k парами какое-то другое комбинаторное действие b_k способами. В этом случае

$$F(z) = a_2\frac{z^2}{2!}, \qquad G(z) = b_0 + b_1 z + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_k\frac{z^k}{k!} + \ldots,$$

и поэтому

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1 z + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots = b_0 + b_1 a_2\frac{z^2}{2!} + b_2\left(a_2\frac{z^2}{2!}\right)^2\frac{1}{2!} + \ldots + b_k\left(a_2\frac{z^2}{2!}\right)^k\frac{1}{k!} + \ldots$$

Таким образом, для данного частного случая коэффициенты c_n рассчитываются по формулам

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k+1, \\ n!\,\dfrac{b_k}{k!}\Big(\dfrac{a_2}{2!}\Big)^k, & \text{если } n = 2k, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 10.2. Теперь предположим, что количество людей в помещении кратно пяти, т.е. $n = 5k$, и мы совершаем аналогичные комбинаторные действия над пятерками людей. Именно, мы разбиваем n-множество на пятерки, совершаем над любой из этой пятерок комбинаторные действия a_5 способами, а затем совершаем над самими этими пятерками какое-то другое комбинаторное действие b_k способами. В этом случае

$$F(z) = a_5\frac{z^5}{5!}, \qquad G(z) = b_0 + b_1 z + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_k\frac{z^k}{k!} + \ldots,$$

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1 z + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots = b_0 + b_1 a_5\frac{z^5}{5!} + b_2\Big(a_5\frac{z^5}{5!}\Big)^2\frac{1}{2!} + \ldots + b_k\Big(a_5\frac{z^5}{5!}\Big)^k\frac{1}{k!} + \ldots,$$

так что

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 5k, \\ n!\,\dfrac{b_k}{k!}\Big(\dfrac{a_5}{5!}\Big)^k, & \text{если } n = 5k, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 10.3. Наконец, предположим, что нам разрешено разбивать n-элементное множество U как на пятерки, так и на двойки. При таком условии

$$F(z) = a_2\frac{z^2}{2!} + a_5\frac{z^5}{5!}, \qquad G(z) = b_0 + b_1 z + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_k\frac{z^k}{k!} + \ldots,$$

и наша задача — определить явное выражение для коэффициентов c_n в экспоненциальной производящей функции

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1 z + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots =$$

$$= b_0 + b_1\Big(a_2\frac{z^2}{2!} + a_5\frac{z^5}{5!}\Big) + b_2\Big(a_2\frac{z^2}{2!} + a_5\frac{z^5}{5!}\Big)^2\frac{1}{2!} + \ldots + b_k\Big(a_2\frac{z^2}{2!} + a_5\frac{z^5}{5!}\Big)^k\frac{1}{k!} + \ldots$$

Так как

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i y^{k-i} = \sum_{\substack{i_1+i_2=k\\ i_1,i_2\geqslant 0}}\frac{k!}{i_1!i_2!}x^{i_1}y^{i_2},$$

то

$$b_k\Big(a_2\frac{z^2}{2!} + a_5\frac{z^5}{5!}\Big)^k\frac{1}{k!} = b_k\sum_{\substack{k_2+k_5=k\\ k_2,k_5\geqslant 0}}\frac{1}{k_2!k_5!}a_2^{k_2}a_5^{k_5}\frac{1}{(2!)^{k_2}}\frac{1}{(5!)^{k_5}}z^{2\cdot k_2+5\cdot k_5}.$$

Нам же нужно во всех выражениях такого типа (то есть для любых $k = 0, 1, 2, \ldots$) собрать слагаемые при $z^n/n!$. Иными словами, нас интересуют все такие k_2 и k_5, которые обеспечивают нам равенство $2k_2 + 5k_5 = n$. Учитывая эти соображения, мы для c_n получаем соотношение вида

$$c_n = \sum_{\substack{2\cdot k_2+5\cdot k_5=n\\ k_2,k_5\geqslant 0}}\frac{n!}{k_2!k_5!}b_{k_2+k_5}\Big(\frac{a_2}{2!}\Big)^{k_2}\Big(\frac{a_5}{5!}\Big)^{k_5}.$$

Еще раз подчеркнем, что суммирование в этой формуле происходит по всем возможным решениям уравнения

$$2 \cdot k_2 + 5 \cdot k_5 = n, \qquad k_2, k_5 \geqslant 0.$$

Количество таких решений, как мы знаем, можно найти с помощью производящей функции

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^5)}.$$

10.1.2. Теперь более-менее понятно, как обобщить наши рассуждения на общий случай функции

$$F(z) = 0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Аналогичные рассуждения показывают, что в общем случае коэффициенты c_n вычисляются по формуле

$$c_n = \sum_{\substack{1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n \\ k_i \geqslant 0}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!} b_{k_1+\ldots+k_n} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{a_n}{n!}\right)^{k_n}. \tag{52}$$

Суммирование в (52) ведется по всем неотрицательным целым решениям уравнения

$$1 \cdot k_1 + \ldots + n \cdot k_n = n, \qquad k_i \geqslant 0, \tag{53}$$

количество которых, как известно, равно $p(n)$. Заметим, однако, что в формуле (52) нам нужно не просто найти число всевозможных решений, но и предъявить все эти решения.

10.1.3. Формула (52) для коэффициентов c_n впервые была получена французским математиком Арбогастом в 1800 году и переоткрыта в 1855 году итальянским математиком, изобретателем и священником Франческо Фаа ди Бруно. С тех пор она носит название формулы Фаа ди Бруно.

Заметим, что и Арбогаст, и Фаа ди Бруно получили формулу (52), пытаясь получить выражение для n-й производной композиции двух аналитических функций. Первые несколько таких производных сосчитать легко:

$$\sqsupset \; H(z) = G(F(z)) \qquad \Longrightarrow \qquad H'(z) = G'_F \cdot F'_z,$$

$$H''(z) = G''_{FF} \cdot (F'_z)^2 + G'_F \cdot F''_{zz},$$
$$H'''(z) = G'''_{FFF} \cdot (F'_z)^3 + 3 \cdot G''_{FF} \cdot F'_z \cdot F''_{zz} + G'_F \cdot F'''_{zzz}.$$

Возникает вопрос — существует ли общая формула для этих производных, и какое отношение имеет к ней композиционная формула? На самом же деле, конечно же, имеет, и самое прямое. Именно, любая аналитическая в точке $z = 0$ функция раскладывается в окрестности этой точки в ряд Тейлора:

$$F(z) = F(0) + F'(0)\frac{z^1}{1!} + F''(0)\frac{z^2}{2!} + \ldots + F^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} + \ldots =: a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$G(z) = G(0) + G'(0)\frac{z^1}{1!} + G''(0)\frac{z^2}{2!} + \ldots + G^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} + \ldots =: b_0 + b_1\frac{z}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Поэтому

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1\frac{z}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

где коэффициенты $c_n = H^{(n)}(0)$ как раз и вычисляются по формулам (52).

10.2. С практической точки зрения полученные нами выше явные аналитические формулы (52) не очень удобны — хотя бы потому, что в процессе вычисления коэффициентов c_n по формулам (52) нам приходится решать довольно-таки нетривиальную задачу по поиску всех решений уравнения (53) в неотрицательных целых числах. Зачастую значительно более удобными оказываются рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты a_n, b_n и c_n у производящих функций, входящих в композиционную формулу (51). К получению такого рода соотношений мы сейчас и перейдем.

10.2.1. Обратимся еще раз к формуле (52). Заметим, что индексы у коэффициентов b_k в этой формуле зависят от конкретного решения уравнения в целых числах

$$1 \cdot k_1 + \ldots + n \cdot k_n = n,$$

то есть заранее не фиксируются. Нам же будет сейчас удобно наряду с n зафиксировать также и индекс $k = k_1 + \ldots + k_n$, то есть зафиксировать количество блоков в разбиении n-множества. По сути дела, мы хотим перегруппировать слагаемые в (52), записав коэффициенты c_n в виде

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot B_{n,k}(a_1, \ldots, a_n), \tag{54}$$

$$B_{n,k}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{a_n}{n!}\right)^{k_n}. \tag{55}$$

С комбинаторной точки зрения функции $B_{n,k}(a_1, \ldots, a_n)$ описывают количество способов разбить n различимых предметов ровно на k неразличимых непустых блока, а затем совершить над элементами каждого такого блока размерами i_m комбинаторные действия a_{i_m} способами.

Казалось бы, мы ничуть не упростили себе задачу — ведь для вычисления функций $B_{n,k}$ по формулам (55) нам вместо решения задачи (53) приходится искать все решения в целых неотрицательных числах системы

$$\begin{aligned} k_1 + \ldots + k_n &= k, \\ 1 \cdot k_1 + \ldots + n \cdot k_n &= n \end{aligned} \tag{56}$$

при фиксированных значениях параметров n и k. Однако у такой формы записи есть одно немаловажное преимущество: в ней, в отличие от формулы (52), явным образом разделены коэффициенты a_n и b_k производящих функций $F(z)$ и $G(z)$. Именно, все коэффициенты a_n собраны в функции $B_{n,k}$, которые, в свою очередь, никак не зависят от коэффициентов b_k. Оказывается, что это соображение можно положить в основу получения рекуррентных соотношений на функции $B_{n,k}$.

10.2.2. Действительно, предположим, что существуют рекуррентные соотношения, связывающие функции $B_{n,k}(a_1, \ldots, a_n)$. Так как эти функции никак не зависят от b_k, то они должны быть верными при любых значениях этих коэффициентов. Выберем тогда в качестве b_k выражения вида t^k, где t — некоторый произвольный параметр. С комбинаторной точки зрения такой выбор коэффициентов означает следующее: мы приписываем любому разбиению n-множества ровно на k блоков вес (или метку) t^k. Производящая функция

$$H(z) = 1 + t\frac{F(z)}{1!} + t^2\frac{[F(z)]^2}{2!} + \ldots + t^k\frac{[F(z)]^k}{k!} + \ldots$$

формально зависит теперь от двух переменных — z и t. Раскрывая в этом выражении скобки и собирая слагаемые при $z^n/n!$, мы можем переписать эту функцию в следующем виде:

$$H(z,t) = 1 + c_1(t)\frac{z}{1!} + c_2(t)\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n(t)\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\text{где} \qquad c_n(t) := \sum_{k=1}^{n} t^k \cdot B_{n,k}, \qquad n > 0.$$

Заметим теперь, что функция $H(z,t)$ представляет собой композицию двух функций — функции $G(z,t) = \exp(t \cdot z)$ и функции $F(z)$, то есть может быть записана как

$$H(z,t) = \exp(t \cdot F(z)).$$

А из такого рода равенства мы уже умеем получать нужные нам рекуррентные соотношения. Действительно, как и при выводе формул (49), продифференцируем это равенство по z и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z:

$$\frac{\partial H(z,t)}{\partial z} = t \cdot \exp(t \cdot F(z)) \cdot F'(z) = t \cdot H(z,t) \cdot F'(z) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad c_1(t) + c_2(t)\frac{z}{1!}z + \ldots + c_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!} + \ldots =$$

$$= t \cdot \Big(c_0(t) + c_1(t)\frac{z}{1!} + \ldots + c_n(t)\frac{z^n}{n!} + \ldots\Big)\Big(a_1 + a_2\frac{z}{1!} + \ldots + a_{n+1}\frac{z^n}{n!} + \ldots\Big) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad c_{n+1}(t) = t\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c_i(t) \cdot a_{n+1-i}.$$

Вспоминая теперь, что $c_n(t) := \sum\limits_{k=1}^{n} t^k \cdot B_{n,k}$, мы последнее равенство можем переписать так:

$$\sum_{k=1}^{n+1} B_{n+1,k} \cdot t^k = t\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_{n+1-i}\sum_{k=0}^{i} B_{i,k} \cdot t^k = \sum_{k=0}^{n} t^{k+1}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}B_{i,k} \cdot a_{n+1-i}.$$

Все, что нам теперь остается сделать для получения рекуррентных соотношений на функции $B_{n,k}$ — это приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t^k. В результате данной операции мы получаем, что функции $B_{n,k}$ вычисляются по формулам

$$B_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}B_{i,k} \cdot a_{n+1-i}, \qquad k = 0, \ldots, n; \qquad B_{0,0} = c_0(t) = 1. \tag{57}$$

При этом предполагается, что $B_{n,0} = 0$ для всех $n > 0$, и $B_{0,k} = 0$ для всех $k > 0$.

Из полученных нами рекуррентных соотношений (57), в частности, следует, что функции $B_{n,k} = B_{n,k}(a_1, \ldots, a_n)$ представляют собой полиномы от переменных $a_1, \ldots, a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Эти полиномы называются *полиномами Белла* и имеют огромное количество приложений как в комбинаторике, так и во многих других разделах математики.

10.2.3. Рассмотрим теперь важный частный случай полученных нами формул, а именно, случай, когда все коэффициенты a_n, $n > 0$, производящей функции $F(z)$ равны единице. Коэффициенты $B_{n,k} = B_{n,k}(1, \ldots, 1)$ в этом случае описывают количество способов разложить n

различимых предметов ровно по k неразличимым ящикам при условии, что в каждый ящик следует положить хотя бы один предмет. Иными словами, $B_{n,k}(1,\ldots,1)$ представляют собой не что иное, как числа Стирлинга второго рода $S(n,k)$.

Отмеченное обстоятельство, в свою очередь, позволяет получить для чисел Стирлинга $S(n,k)$ удобные рекуррентные соотношения. Действительно, полагая в формулах (57) все коэффициенты a_n, $n > 0$, равными единице, мы получаем равенства вида $S(0,0) = 1$, $S(n+1,0) = 0$ для всех $n \geqslant 0$,

$$S(n+1,k+1) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} S(i,k), \qquad k = 0,\ldots,n, \quad n = 0,1,\ldots \tag{58}$$

Наконец, подставляя $a_n = 1$, $n > 0$ в формулы (55), мы получаем еще одно представление чисел Стирлинга второго рода, а именно,

$$S(n,k) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!(1!)^{k_1}\ldots(n!)^{k_n}}. \tag{59}$$

Данное соотношение полезно сравнить со следующей формулой для чисел Стирлинга $S(n,k)$, полученной в первой главе:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\widehat{S}(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=n \\ k_i>0}} \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}.$$

В этой формуле, в отличие от (59), суммирование идет по всем *упорядоченным* разбиениям числа n.