Домашнее задание 6. Основные понятия теории графов.

Группа 102/3

Количество баллов на зачёт: 8

1. (1 балл) В футбольной лиге имеется два дивизиона, в каждом — по 13 команд; можно ли составить такое расписание игр, при котором каждая команда сыграет девять игр с командами из своего дивизиона и четыре — с командами из другого дивизиона?

2. (0,5 балла) Докажите, что любой турнир, построенный на n вершинах, имеет не более одной вершины x, исходящая степень которой $outdeg(x) = n - 1$.

3. (0,5 балла) Докажите, что в случае нечетных n существует турнир T, в котором для любой вершины x выполняется равенство
$$outdeg(x) = indeg(x).$$

4. (1 балл) Пусть G есть граф, построенный на вершинах $1, \ldots, 15$, в котором вершины i и j смежны тогда и только тогда, когда их наибольший общий делитель больше единицы. Подсчитать количество связных компонент такого графа, а также определить максимальную длину простого пути (path) в графе G.

5. (1 балл) Докажите, что в любом графе G расстояние $d(x, y)$ между вершинами удовлетворяет неравенству треугольника
$$d(x, z) + d(z, y) \geqslant d(x, y) \qquad \forall \quad x, y, z \in V(G).$$

6. (1 балл) Докажите, что радиус и диаметр графа связаны следующим образом:
$$r(G) \leqslant diam(G) \leqslant 2r(G).$$
Привести примеры графов, на которых оба неравенства достигаются (определения).

7. (1,5 балла) Докажите или опровергните следующее утверждение: объединение двух *различных* маршрутов, соединяющих две вершины, содержит цикл.

8. (1 балл) Невозрастающая последовательность неотрицательных чисел
$$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \ldots, d_n), \quad d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n \geqslant 0,$$
называется *графовой*, если она является последовательностью степеней вершин некоторого *простого* графа G. Какие из представленных ниже числовых последовательностей являются графовыми?

(1) 5 2 2 1
(2) 2 2 1 1
(3) 1
(4) 2
(5) 1 1
(6) 6 5 4 3

9. (2 балла) Рассмотрим последовательность $\mathbf{d_1} := (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$. Удалим в ней число 3, стоящее на первой позиции, а от следущих трех чисел отнимем по единице. В результате получим последовательность $\mathbf{d_2} := (2, 2, 2, 3, 2, 2, 1)$, которая после переупорядочивания по невозрастанию примет вид $(3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$. В общем случае соответствующая пара последовательностей будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{d_1} &:= (s, \quad d_1, \quad d_2, \quad \ldots, d_s, \qquad d_{s+1}, \ldots, d_n), \\ \mathbf{d_2} &:= \quad (d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_s - 1, d_{s+1}, \ldots, d_n). \end{aligned}$$

Докажите, что последовательность $\mathbf{d_1}$ является графовой тогда и только тогда, когда таковой является и последовательность $\mathbf{d_2}$. Сформулируйте на основании данного утверждения алгоритм проверки на графовость для невозрастающей числовой последовательности.

10. (1,5 балла) Докажите, что граф Q_k (т. е. k-куб) действительно является k-регулярным двудольным графом. Подсчитайте количество вершин и ребер в таком графе. Сколько различных копий P_3 и C_4 содержит такой граф?

11. (2 балла) Пусть G есть простой граф, диаметр которого $diam(G) \geqslant 3$. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ имеет диаметр $diam(\bar{G}) \leqslant 3$

12. (2,5 балла) Докажите, что простой граф G, построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.