8 Домашнее задание

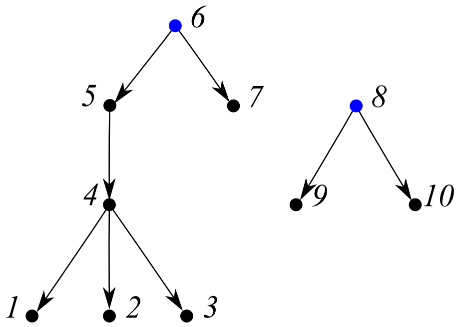
8.1 (1,5 балла)**.** Выразить через числа Стирлинга $S(n,k)$ второго рода количество деревьев, имеющих в точности k листьев.

8.2 (1 балл)**.** Доказать, что количество корневых лесов, построенных на n вершинах, описывается формулой $(n+1)^{(n-1)}$.

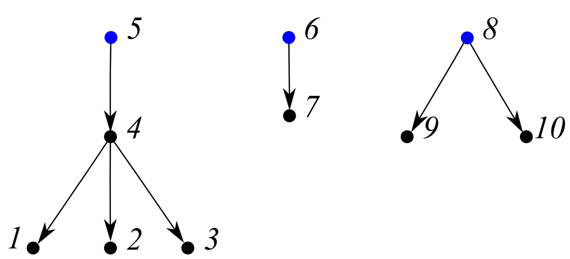
8.3 (2 балла)**.** Пусть у нас имеется улица с односторонним движением, на которой расположено n парковочных мест. На эту улицу последовательно заезжают машины с порядковыми номерами от 1 до n. Каждая i-я машина по прибытии едет вначале к своему любимому парковочному месту $f(i)$. Если это место оказывается свободным, то она занимает его. В противном случае она пытается занять первое следующее за ним свободное место. В случае, если такового не оказывается, процесс парковки считается завершившимся неудачей.

Функция $f\colon [n] \to [n]$ называется парковочной функцией, если задаваемая ею парковка всех n машин прошла успешно. Доказать, что количество всех различных парковочных функций равно $(n+1)^{(n-1)}$.

8.4 (2 балла)**.** Обозначим через $F_{n,k}$ множество всех корневых лесов, состоящих ровно из k корневых деревьев. Нас будет интересовать представление таких лесов в виде ориентированных графов, все ребра которых направлены от корней образующих лес деревьев. Говорят, что лес F



(a) Лес $F_{10,2}$



(b) Лес $F_{10,3}$

Рис. 1: Лес $F_{10,2}$ содержит лес $F_{10,3}$

содержит лес F', если F содержит F' как ориентированный подграф. Если при этом множества вершин графов F и F' совпадают, то в F имеется меньшее количество деревьев по сравнению с лесом F'. На рис.1,a в качестве примера изображен лес $F_{10,2}$, состоящий из двух деревьев, а на рис.1,b — лес $F'_{10,3}$, содержащий три дерева. Согласно нашему определению, лес $F_{10,2}$ содержит лес $F'_{10,3}$.

Последовательность лесов $F_{n,1}, F_{n,2}, \ldots, F_{n,k}$ называется *измельчающей последовательностью,* если для любого i лес $F_{n,i}$ содержит лес $F_{n,i+1}$. Обозначим через $N(F_{n,k})$ количество измельчающихся последовательностей, заканчивающихся лесом $F_{n,k}$. Используя процедуру double counting для подсчета $N(F_{n,k})$, доказать формулу Кэли для количества деревьев, построенных на n вершинах.

8.5 (1 балл)**.** Рассмотрим 3-регулярный граф, представляющий собой ожерелье из m графов "воздушный змей" (на рис.2 такой граф показан для случая $m = 6$). Без использования рекуррентного соотношения

$$t(G) = t(G-e) + t(G \setminus e), \tag{1}$$

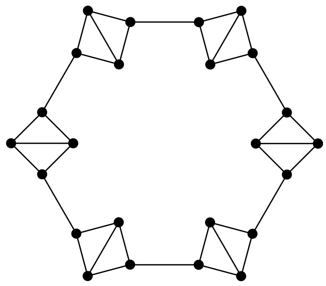


Рис. 2

и матричной теоремы о деревьях подсчитать количество остовных деревьев в таком графе для произвольного значения параметра $m > 1$.

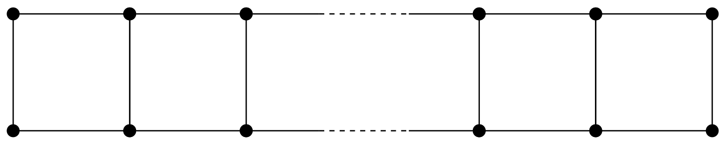


Рис. 3: Граф G_n

8.6 (1,5 балла)**.** Используя рекуррентное соотношение (1), подсчитать количество остовных деревьев графа G_n “лестница” (рис.3), построенного на $2n$ вершинах и $3n-2$ ребрах.

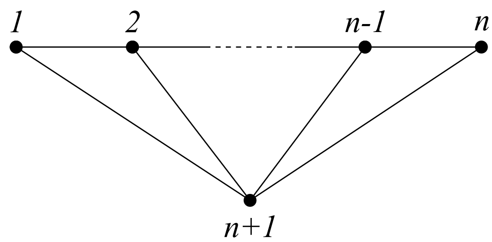


Рис. 4: Граф G_n

8.7 (1,5 балла)**.** Используя рекуррентное соотношение (1), подсчитать количество остовных деревьев графа $K_1 \vee P_n$ “веер” (рис.4), полученного добавлением к P_n вершины, смежной с каждой из вершин пути P_n. Выразить ответ через числа Фибоначчи.

8.8 (2 балла)**.** Используя рекуррентное соотношение (1), подсчитать количество остовных деревьев в графе W_n (колесе). Выразить ответ через числа Люка. Для тех, кто не знает, что такое числа Люка, почитать о них на Википедии.

8.9 (1,5 балла)**.** Без использования рекуррентного соотношения (1) и матричной теоремы о деревьях доказать, что количество остовных деревьев графа $K_{2,n}$ равняется $n \cdot 2^{n-1}$.

8.10 (2 балла)**.** Без использования рекуррентного соотношения (1) и матричной теоремы о деревьях доказать, что количество остовных деревьев графа $K_{3,n}$ равняется $n^2 \cdot 3^{n-1}$.

8.11 (1 балл)**.** Используя матричную теорему о деревьях, подсчитать количество всех остовных деревьев полного двудольного графа $K_{m,n}$.

8.12 (1 балл)**.** Используя формулу Кэли, доказать, что в графе $K_n - e$ имеется ровно $(n-2) \cdot n^{n-3}$ остовных деревьев.