Рекуррентные соотношения(ДЗ).

10 марта 2017 г.

1. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 4\,a_n + 3 \cdot 2^n.$$

   Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

2. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 6\,a_n + 6 \cdot 3^n.$$

   Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

3. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 3\,a_{n+1} - 2\,a_n + 3 \cdot \sin(n\pi/2).$$

   Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

4. Мы положили тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года мы докладываем пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через n лет?

5. В теннисном турнире участвуют $2n$ игроков. Составить и решить рекуррентное соотношение для количества a_n различных пар, которые можно сформировать для n матчей первого круга.

6. На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

7. Рассмотрим плоскость (x, y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.

8. Космический зонд обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, состоящее из пяти символов (a, b, c, d, e). Четыре пары символов — ce, cd, ed, ee — никогда не встречаются в марсианских ДНК, однако любая цепочка, не содержащая этих пар, возможна. Порядок букв в цепочке важен, поэтому, например, цепочка *bbdca* возможна, а *bbcda* — нет. Найти рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти цепочки слов. Построить решения этих рекуррентных соотношений.

9. Используя соотношение доказанные ранее, доказать, что наибольший общий делитель чисел Фибоначчи F_n и F_m есть число Фибоначчи F_d, где d есть наибольший общий делитель чисел n и m:

$$\gcd(F_n, F_m) = F_d, \qquad d = \gcd(n, m).$$

10. Доказать, что возможна, вообще говоря, фибоначчиева система исчисления, показав, что любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \ldots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты a_i равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел $\{a_i\}$ не равны одновременно единице.