

Программа курса “Алгебра”
2014/2015 учебный год; весенний семестр.

1. Системы линейных уравнений. Элементарные преобразования. Приведение к ступенчатому виду.
2. Векторные пространства. Примеры. Простейшие свойства векторных пространств.
3. Линейные комбинации. Линейная зависимость и линейная независимость.
4. Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций.
5. Подпространства векторного пространства. Критерий подпространства. Пересечение подпространств.
6. Подпространство, порожденное семейством векторов. Эквивалентность двух определений. Семейства образующих.
7. Базис векторного пространства. Эквивалентные переформулировки понятия базиса.
8. Теорема о существовании базиса векторного пространства (доказательство только для конечнопорожденных пространств).
9. Инвариантность числа векторов в базисе конечнопорожденного пространства. Размерность векторного пространства.
10. Координаты вектора в базисе. Матрица перехода от базиса к базису. Произведение матриц перехода. Матрица обратного перехода.
11. Координаты вектора. Преобразование координат при замене базиса.
12. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения двух подпространств. Прямая сумма векторных пространств.
13. Линейные отображения. Простейшие свойства.
14. Ядро и образ линейного отображения. Ядро и образ являются подпространствами.
15. Критерий инъективности линейного отображения.
16. Изоморфизм векторных пространств. Критерий изоморфности конечномерных пространств.
17. Пространство линейных отображений. Матрица линейного отображения. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
18. Матрица композиции линейных отображений.
19. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.
20. Приведение матрицы линейного преобразования к почти единичному виду.
21. Теорема о размерностях ядра и образа линейного отображения.
22. Ранг матрицы. Строчный и столбцовый ранги. Совпадение ранга, строкового и столбцового рангов.
23. Неравенства для ранга произведения матриц.
24. Элементарные матрицы. Элементарные трансвекции. Разложение обратимой матрицы в произведение диагональных и элементарных трансвекций.
25. Линейные функционалы. Двойственное пространство. Изоморфизм между конечномерным пространством и его двойственным.
26. Вложение пространства во второе двойственное. Канонический изоморфизм между конечномерным пространством и вторым двойственным.
27. Линейные операторы. Собственные числа и собственные векторы операторов. Характеристический многочлен. Собственные числа как корни характеристического многочлена. Диагонализуемые операторы. Критерий диагонализуемости.

28. Многочлены от оператора. Два многочлена от одного оператора коммутируют.
29. Инвариантные подпространства.
30. f -инвариантность пространств $\ker H(f)$, $\operatorname{Im} H(f)$.
31. Теорема Гамильтона—Кэли.
32. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму корневых.
33. Формулировка теоремы о канонической жордановой форме матрицы оператора.
34. Относительная линейная независимость, относительный базис. Лемма об относительно линейно независимых векторах для корневых подпространств.
35. Жорданова форма оператора с единственным собственным числом.
36. Примеры применения жордановой формы.
37. Билинейные и полуторалинейные формы.
38. Матрица Грама билинейной (полуторалинейной) формы. Её простейшие свойства.
39. Преобразование матрицы Грама при замене базиса.
40. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации положительно определенной вещественной симметрической билинейной (комплексной эрмитовой полуторалинейной) формы.