19 октября 2017

Количество баллов на зачет: *9.5*

1. *(2 балла)* Доказать, что любой граф G без петель содержит остовный двудольный подграф F, степень любой вершины x в котором больше или равна $\deg(x)/2$, где $\deg(x)$ — степень той же вершины в исходном графе.

2. *(1 балл)* Пусть G есть граф, обхват $g(G)$ которого меньше бесконечности. Доказать, что для такого графа справедливо неравенство вида $g(G) \leq 2\operatorname{diam}(G) + 1$.

3. *(2 балла)* Пусть G есть простой граф без треугольников, то есть граф, не содержащий K_3 в качестве своего индуцированного цикла. Показать, что максимальное количество ребер в таком графе не превосходит $n^2/4$.

4. *(2.5 балла)* Пусть G есть простой граф, построенный на 10 вершинах и имеющий 38 ребер. Доказать, что G содержит K_4 в качестве своего индуцированного подграфа.

5. *(2 балла)* Пусть G есть простой граф на 10 вершинах и 26 ребрах. Доказать, что такой граф содержит в качестве своих индуцированных подграфов по меньшей мере пять треугольников

6. *(1.5 балла)* Пусть вершина x есть точка сочленения графа G. Показать, что граф $\bar{G} - x$ является связным.

7. *(1.5 балла)* Пусть G есть простой граф, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Доказать, что количество m ребер в таком графе лежит в диапазоне

$$n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

8. *(1 балл)* Пусть T есть дерево, в котором имеются только лишь вершины степени 1 и/или 3. Предположим, что T имеет 10 вершин степени 3. Сколько вершин степени 1 может иметь такое дерево?

9. *(1.5 балла)* Рассмотрим произвольную неубывающую последовательность $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, $n \geq 2$, положительных натуральных чисел. Доказать, что равенство

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n - 2, \qquad d_i > 0 \tag{1}$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта последовательность была графовой для некоторого дерева T, построенного на n вершинах.

10. *(1.5 балла)* Пусть G есть простой граф с $\delta(G) \geq k$, а T есть произвольное дерево с k ребрами. Доказать, что в G имеется подграф, изоморфный T.

11. *(2 балла)* Пусть у нас имеется какое-то множество G, а также некоторый набор $H_1, \ldots, H_k$ его подмножеств. Говорят, что набор таких подмножеств обладает свойством Хелли (Helly property), если из того, что любая пара таких подмножеств имеет непустое пересечение, следует, что пересечение всех этих подмножеств не пусто. Так, если у нас имеется набор попарно пересекающихся интервалов на прямой, то их пересечение непусто. Доказать, что поддеревья любого дерева обладают свойством Хелли. Иными словами, доказать, что для любого набора $T_1, \ldots, T_k$ поддеревьев дерева T, любые два их которых имеют непустое пересечение, найдется общая для всех этих поддеревьев вершина x. Показать, что в случае связного графа, деревом не являющегося, это свойство может и не выполняться.