Занятие 13. Замена переменных в кратных интегралах. Несобственные кратные интегралы. 13 декабря 2017 г.

Замена переменных в кратных интегралах

Пусть $X, U \subset \mathbb{R}^n$ — измеримые области, φ — отображение из $\overline{U}$ на $\overline{X}$ такое, что

1. φ взаимно однозначна на U;
2. φ — непрерывно дифференцируема на $\overline{U}$.

Если функция $f(x)$ интегрируема на X, то функция $f(\varphi(u))|J(u)|$ интегрируема на U и

$$\int_X f(x)dx = \int_U f(\varphi(u))|J(u)|du,$$

где

$$J(u) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots u_n)} = \det \varphi'(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}.$$

Если отображение задано обратной системой функций

$$u_i := \psi_i(x_1, \ldots, x_n),$$

то в точке $u^0 = \psi(x^0)$ якобиан можно найти по формуле

$$J(u^0) = \left(\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x^0)\right)^{-1} = (\det \psi'(x^0))^{-1},$$

если $\psi'(x^0)$ существует. Для полярных координат на плоскости $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $J = \ldots r$. Для сферических координат $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$, $J = r^2\cos\psi$, для цилиндрических координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $J = r$.

Несобственные кратные интегралы

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Последовательность открытых измеримых множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$ называют **исчерпывающей** множество G, если 1). $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ 2). $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

Пусть для любой последовательности исчерпывающих G множеств G_k, $k = 1, 2, \ldots$, существует предел, не зависящий от выбора последовательности G_k, $k = 1, 2, \ldots$, тогда этот предел называют **несобственным интегралом** от f на G и обозначают

$$\int_G f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{G_k} f(x)dx,$$

а функцию f называют интегрируемой в несобственном смысле на G. Если этот символ так определен, то интеграл называют **сходящимся**. В противном случае, **расходящимся**.

Сходящиеся несобственные интегралы обладают свойствами линейности, аддитивности по множествам, сохраняют знак неравенства при интегрировании, для них справедлива формула замены переменной и т.д.

Если функция f неотрицательна на G, то для любой последовательности $\{G_k\}$, исчерпывающей G, существует конечный или бесконечный предел $\lim_{k\to\infty} \int_{G_k} f(x)dx$, и он не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. То есть для неотрицательной функции достаточно исследовать одну последовательность.

Если $0 \le f(x) \le g(x)$ на G, то из сходимости $\int_G g(x)dx$ следует сходимость $\int_G f(x)dx$, из расходимости $\int_G f(x)dx$ — расходимость $\int_G g(x)dx$.

Несобственный интеграл $\int_G f(x)dx$ называют абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_G |f(x)|dx$.

Если кратный ($n \ge 2$) интеграл сходится, то он и абсолютно сходится.

На паре успели:

1. Вычислите интегралы $I_j = \iint_{X_j} f_j(x;y)dxdy$, где
   (a) $f_1(x;y) = x$, $X_1 = \{2x \le x^2 + y^2 \le 6x, y \le x\}$;
   (b) $f_2(x;y) = 1/y$, множество X_2 ограничено прямыми $y = x$, $y = 2x$, $y = 1 - x/2$, $y = 4 - 2x$.
2. Докажите сходимость интеграла $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ и найдите его значение.

   [Осталось на дом:]
3. $\int_{-a}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$
4. $\iint_G \frac{y}{x^2}dxdy$, $G = \{0 < x, x^3 \le y \le x^2\}$

5. Вычислите интегралы $\iiint_{X_j} f_j(x;y;z)dxdydz$, где

(a) $f_1(x;y;z) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $X_1 = \{\sqrt{x^2+y^2} \le z \le a\}$;

(b) $f_2(x;y;y) = 1$, $x_2 = \{(x^2+y^2+z^2)^2 \le xyz, x \ge 0, y \ge 0\}$;

(c) $f_4(x;y;z) = z$, $X_4 = \{(x-y)^2 + (y-z)^2 \le R^2, 0 \le x+y+z \le h\}$