

# Домашнее задание

26 февраля 2015 г.

Доваление новых типов:

1. Добавим новый тип  $\mathbb{N}$ .

Также добавим константы  $0, Suc, R_\sigma$  со следующими правилами типизации:

- $\Gamma \vdash 0 : \mathbb{N}$
- $\Gamma \vdash Suc : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- $\Gamma \vdash R_\sigma : \sigma \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \sigma$

Также добавим следующие правила редукции:

- $R_\sigma F G 0 \rightarrow_\delta F$
- $R_\sigma F G (S n) \rightarrow_\delta G n (R_\sigma F G n)$

2. Добавим новый тип  $Bool$ .

Также добавим константы  $true, false, if_\sigma$  со следующими правилами типизации:

- $\Gamma \vdash true : Bool$
- $\Gamma \vdash false : Bool$
- $\Gamma \vdash if_\sigma : Bool \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma$

Также добавим следующие правила редукции:

- $if_\sigma true M N \rightarrow_\delta M$
- $if_\sigma false M N \rightarrow_\delta N$

Задания:

1. Найдите наиболее общие типы следующих термов:

- (a)  $\lambda xy.xy$
- (b)  $\lambda xy.yx$
- (c)  $\lambda xx.x$

(d)  $\lambda xy.x(yx)$

(e)  $\lambda xy.xyx$

(2 балла, сложность 2/10)

2. Найдите термы следующих типов:

(a)  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$  (найдите 3 неэквивалентных терма) (1 балл, сложность 3/10)

(b)  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$  (1 балл, сложность 4/10)

(c) Найдите такой терм типа  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ , что этому терму нельзя приписать тип  $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$  (1 балл, сложность 2/10)

(d)  $((((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$  (2 балла, сложность 4/10)

3. Найдите термы, реализующие следующие функции. Используйте типизацию по Чёрчу. В скобках указаны типы, которые должны иметь термы.

(a) Больше либо равно ( $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow Bool$ ). (1 балл, сложность 1/10)

(b) Факториал ( $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ). (1 балл, сложность 1/10)

(c) Функция Аккермана ( $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ). (1 балл, сложность 4/10)

4. Добавьте следующие типы (вместе с необходимыми константами и правилами редукции, для списков - это  $nil$ ,  $cons$  и оператор примитивной рекурсии):

(a) Типы пар  $Pair_{\sigma, \tau}$ . (1 балл, сложность 1/10)

(b) Типы списков  $List_{\sigma}$ . (2 балла, сложность 4/10)

5. Реализуйте функцию сортировки  $List_{\mathbb{N}} \rightarrow List_{\mathbb{N}}$ . (2 балла, сложность 4/10)