Домашнее задание №3

Частные производные неявных и обратных функций. Замены переменной.

Задача, которая очень хорошо позволяет разобраться в заменах переменных и производных обратных функций

Преобразовать уравнение $y'y''' - 3(y'')^2 = x$, приняв y за новую независимую переменную.

ОТВЕТ для самоконтроля:

$$x''' + x(x')^5 = 0.$$

1. (1) Приняв y за новую независимую переменную преобразовать уравнение

$$(y')^2 y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15(y'')^3 = 0.$$

2. (1) Преобразовать уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

приняв x за функцию и $t = xy$ — за независимое переменное.

Производная сложной функции

Если $w = f(x, y, z)$ дифференцируема и $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, где φ, ψ, χ — дифференцируемы, то

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

3. Пусть

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0, \tag{1}$$

.

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

а) (1) Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$, если $z = z(x, y)$ — неявная функция, определяемая уравнением (1);

б)(1) Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$, если $y = y(x, y)$ — неявная функция, определяемая уравнением (1);

4. (2) Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x^2}$, если $F(xz, yz) = 0$.

5. (2) Докажите, что существует дифференцируемая функция $z = z(x, y)$, определённая на некоторой окрестности точки $(3, -2)$ заданная уравнением

$$z^3 - xz + y = 0,$$

которая при $x = 3$, $y = -2$ принимает значение $z = 2$. Найти $d_{(3,-2)}z$ и $d^2_{(3,-2)}z$.

6. (1) Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

определяет дифференцируемые функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ такие, что $u(1, 2) = 0$, $v(1, 2) = 0$. Найти $d_{(1,2)}u$ и $d_{(1,2)}v$.

7. Преобразовать уравнение, сделав замену переменных:

$$\text{а) (2) } x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{б) (2) } x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \quad xyz \neq 0,$$

приняв за новые независимые переменные $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, и за новую функцию $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

8. (3) Преобразовать выражение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

приняв x за функцию и $u = xz$, $v = yz$ за независимые переменные.

Полярные и сферические координаты

Полярные координаты на плоскости:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

9. (1) В системе уравнений перейти к полярным координатам

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + kx(x^2+y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ky(x^2+y^2). \end{cases}$$

Задача с ответом, чтобы разобраться

Пусть плоская кривая задана графиком функции $y(x)$. Выразить в полярных координатах её кривизну

$$K = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

Ответ для самоконтроля:

$$K = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2+(r')^2)^{3/2}}$$

10. (1) Преобразовать к полярным координатам уравнение

$$(x^2+y^2)^2 y'' = (x+yy')^3.$$

Якобианом отображения

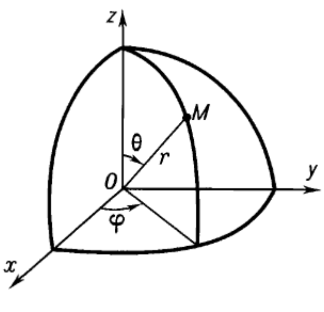
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

называется определитель

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_1} \ldots \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

11. (2) а) Записать $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ в сферических координатах. Сферические координаты связаны с декартовыми следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$



б) (1) Вычислить якобиан замены.

в) (4) Записать в сферических координатах оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

функции $u = u(x, y, z)$.