

# Математическая логика и теория вычислимости

## Лекция 1. Логика высказываний

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий  
Санкт-Петербургского академического университета

13.02.2017

- 1 Язык логики высказываний
- 2 Истинностное значение формул
- 3 Логические законы
- 4 Логическое следствие

Подразделы:

- Теория доказательств
- Теория моделей
- Теория вычислимости
- Теория множеств

Формальные логические системы:

- Логика высказываний
- Логика предикатов первого порядка
- Логики высших порядков
- Неклассические логики

- 1 Язык логики высказываний
- 2 Истинностное значение формул
- 3 Логические законы
- 4 Логическое следствие

- Высказывания (propositions):
  - $5 > 3$ .
  - Река Волга впадает в Каспийское море.
  - В прямоугольном треугольнике все углы равны 60 градусам.
  - Все вороны черные.
  - Сегодняшняя дата меньше 13.05.2017.
  - Бог есть любовь.
  - Любое чётное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел.
- Цель: запись высказываний (математических) на некотором полностью формализованном языке. Этот язык называют *предметным* или *объектным*.
- Утверждения об этих высказываниях делаются на другом языке, называемом *метаязыком*.

- Имеется бесконечный набор *пропозициональных переменных*:

$$a, b, c, d, \dots, x, y, z, a_1, a_2, a_3, \dots$$

- Множество *пропозициональных формул* — это минимальное множество со следующими свойствами:
  - Всякая пропозициональная переменная есть формула;
  - Если  $A$  — формула, то  $\neg A$  — формула;
  - Если  $A$  и  $B$  — формулы, то  $(A \wedge B)$  — формула;
  - Если  $A$  и  $B$  — формулы, то  $(A \vee B)$  — формула;
  - Если  $A$  и  $B$  — формулы, то  $(A \rightarrow B)$  — формула.
- Символы  $\neg$  (*отрицание*),  $\wedge$  (*конъюнкция*),  $\vee$  (*дизъюнкция*) и  $\rightarrow$  (*импликация*) называют *пропозициональными связками*.
- Латинские буквы в верхнем регистре относятся к метатеории.

Примеры формул:

$p$

$(p \wedge q)$

$((p \wedge q) \rightarrow p)$

$((p \wedge q) \rightarrow p) \vee \neg q$

$((s \rightarrow t) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (r \rightarrow t)))$

- Свойства формул часто доказывают индукцией по построению формулы:
  - **база индукции:** доказывают, что любая пропозициональная переменная обладает данным свойством;
  - **индукционный переход:** доказывают, что если формулы  $A$  и  $B$  обладают данным свойством, то формулы  $\neg A$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$  тоже обладают данным свойством.
- **Утверждение.** В любой пропозициональной формуле число открывающих скобок равно числу закрывающих.



- Приоритет (в порядке убывания):  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ .
- Конъюнкцию и дизъюнкцию полагают левоассоциативными, а импликацию — правоассоциативной.
- Примеры :

$$\begin{array}{ll} (p \wedge q) & p \wedge q \\ ((p \wedge q) \rightarrow p) & p \wedge q \rightarrow p \\ (((p \wedge q) \rightarrow p) \vee \neg q) & (p \wedge q \rightarrow p) \vee \neg q \\ ((s \rightarrow t) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (r \rightarrow t))) & (s \rightarrow t) \rightarrow (r \rightarrow s) \rightarrow r \rightarrow t \end{array}$$

- 1 Язык логики высказываний
- 2 Истинностное значение формул
- 3 Логические законы
- 4 Логическое следствие

- Высказывания бывают истинными и ложными.
- Можно задать истинностную интерпретацию пропозициональных формул,
  - 1 приписав каждой переменной одно из двух значений 0 (ложь, false) или 1 (истина, true)
  - 2 и задав истинностные значения пропозициональных связок.
- Первую из этих операций иногда называют *оценкой* (valuation).

# Истинностное значение формул

- Каждой составной формуле истинностное значение приписывают индуктивно, на основе *таблиц истинности* для пропозициональных связок:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

- Импликация понимается в логике не в причинно-следственном смысле:

$(2 \times 2 = 5) \rightarrow$  (луна сделана из зеленого сыра).

Для формул  $p \vee q$ ,  $p \vee q \rightarrow q$ ,  $p \wedge q$ ,  $p \wedge q \rightarrow q$  всевозможные оценки (valuation) пропозициональных переменных  $p$  и  $q$  порождают следующую таблицу истинности

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow q$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1

# Формулы и булевы функции

- Если формула содержит  $n$  пропозициональных переменных, то имеется  $2^n$  различных возможных наборов, значения на которых полностью определяют её истинностное значение.
- То есть формула определяет булеву функцию  $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ .
- Если две формулы задают одну и ту же булеву функцию, их называют *эквивалентными*.

- Если формула содержит  $n$  пропозициональных переменных, то имеется  $2^n$  различных возможных наборов, значения на которых полностью определяют её истинностное значение.
- То есть формула определяет булеву функцию  $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ .
- Если две формулы задают одну и ту же булеву функцию, их называют *эквивалентными*.
- Являются ли эквивалентными формулы  $p$  и  $p \wedge (q \rightarrow q)$ ?

- Если формула содержит  $n$  пропозициональных переменных, то имеется  $2^n$  различных возможных наборов, значения на которых полностью определяют её истинностное значение.
- То есть формула определяет булеву функцию  $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ .
- Если две формулы задают одну и ту же булеву функцию, их называют *эквивалентными*.
- **Являются ли эквивалентными формулы  $p$  и  $p \wedge (q \rightarrow q)$ ?**  
Да, если ввести понятие фиктивной переменной и либерально подходить к аргументности булевой функции.



- Можно оценивать формулы, трактуя значения 0 и 1 как целые числа.
- Тогда значения связок задаются так

$$\llbracket \neg p \rrbracket = 1 - p$$

$$\llbracket p \wedge q \rrbracket = pq = \min(p, q)$$

$$\llbracket p \vee q \rrbracket = p + q - pq = \max(p, q)$$

$$\llbracket p \rightarrow q \rrbracket = 1 - p + pq$$

- Удобной визуализацией являются диаграммы Венна.

- 1 Язык логики высказываний
- 2 Истинностное значение формул
- 3 Логические законы**
- 4 Логическое следствие

- Формулы истинные всегда, при всех оценках, называют *общезначимыми* или *тавтологиями*, они выражают логические законы.
- Такова, например,  $p \wedge q \rightarrow q$ :

p	q	$p \wedge q \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Если есть оценка, в которой формула истинна, то такая формула называется *выполнимой*.
- Если формула является ложной на всех оценках, то она называется *невыполнимой* или *противоречием*.

- **Утверждение.** Две формулы  $A$  и  $B$  эквивалентны тогда и только тогда, когда формула  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$  является тавтологией.
- **Доказательство.** Напомним, что две формулы называют эквивалентными, если они задают одну и ту же булеву функцию. Тогда на произвольном наборе переменных

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

- Введём новую связку  $A \leftrightarrow B$  как сокращение для  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ .
- Эта связка выражает эквивалентность на языке пропозициональных формул.
- Для нее обычно полагают приоритет ниже  $\rightarrow$ .

- Введём новую связку  $A \leftrightarrow B$  как сокращение для  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ .
- Эта связка выражает эквивалентность на языке пропозициональных формул.
- Для нее обычно полагают приоритет ниже  $\rightarrow$ .
- Являются ли эквивалентными две произвольные тавтологии? два противоречия? две выполнимые формулы?

- *нейтральные элементы*

$$p \vee 0 \leftrightarrow p$$

$$p \wedge 1 \leftrightarrow p$$

- *аннигиляторы*

$$p \vee 1 \leftrightarrow 1$$

$$p \wedge 0 \leftrightarrow 0$$

- *идемпотентность*

$$p \wedge p \leftrightarrow p$$

$$p \vee p \leftrightarrow p$$

- *КОММУТАТИВНОСТЬ И АССОЦИАТИВНОСТЬ КОНЪЮНКЦИИ*

$$\begin{aligned}p \wedge q &\leftrightarrow q \wedge p \\(p \wedge q) \wedge r &\leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)\end{aligned}$$

- *КОММУТАТИВНОСТЬ И АССОЦИАТИВНОСТЬ ДИЗЪЮНКЦИИ*

$$\begin{aligned}p \vee q &\leftrightarrow q \vee p \\(p \vee q) \vee r &\leftrightarrow p \vee (q \vee r)\end{aligned}$$

- *ДИСТРИБУТИВНОСТЬ КОНЪЮНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИЗЪЮНКЦИИ И НАОБОРОТ*

$$\begin{aligned}p \wedge (q \vee r) &\leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r \\p \vee q \wedge r &\leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)\end{aligned}$$



# Логические законы (2)

- *законы поглощения*

$$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$$

$$p \vee p \wedge q \leftrightarrow p$$

- *законы Де Моргана*

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

- *закон контрапозиции*

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

- *закон снятия двойного отрицания*

$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

- закон исключенного третьего

$$\neg p \vee p$$

- закон отрицания посылки

$$\neg p \rightarrow p \rightarrow q$$

- выражение импликации через отрицание и дизъюнкцию

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

- закон Пирса

$$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$$

- Пусть  $A$  — некоторая формула, содержащая пропозициональную переменную  $p$ .
- Одновременная замена всех вхождений переменной  $p$  в формуле  $A$  на некоторую формулу  $B$  называется *подстановкой*  $B$  вместо  $p$ , нотация  $A[p := B]$ .
- **Теорема о подстановке.** Если  $A$  — тавтология, то  $A[p := B]$  тоже тавтология для любой формулы  $B$ .

- 1 Язык логики высказываний
- 2 Истинностное значение формул
- 3 Логические законы
- 4 Логическое следствие

- Пусть имеется набор формул  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- Формулу  $B$  называют *логическим следствием* этого набора, если при любой оценке, для которой истинны формулы  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , истинна также и формула  $B$ , нотация

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models B$$

- Символ  $\models$  задает отношение следования в метатеории и читается как “влечет” (“влекут”).
- Для обозначения того факта, что  $A$  — тавтология, часто используют нотацию  $\models A$ .
- **Примеры.**

$$p, p \rightarrow q \models q$$

$$p \models p \vee q$$

$$p \not\models p \wedge q$$

- **Теорема о логическом следствии.**  $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$   
тогда и только тогда, когда  $\models A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ .