ДЗ 1. Квадратичные и билинейные формы

До тех пор пока не оговорено противное любое поле имеет $\operatorname{char} K \neq 2$.

При этих предположениях мы дали определение билинейной формы, квадратичной формы, их матриц, а так же выяснили, что симметричные билинейные формы однозначно соответствуют квадратичным формам.

Для любого конечномерной алгебры A над K мы построили квадратичную форму $tr_{A/K}$ на A, заданную как $tr(ab)$ для всех $a, b \in A$. $tr(x)$ — это след отображения «домножение слева на x». Эта квадратичная форма является инвариантом A. С ней будет связано некоторое количество задач (но позже).

Затем мы обсудили процесс ортогонализации в трёх видах. В первом случае дано квадратичное выражение и мы приводим его к виду сумма квадратов с коэффициентами. Вторая возможность — дана матрица и нужно привести её к диагональному виду. Третий вид — дан набор векторов $e_1, \dots, e_n$ и скалярное произведение — найти набор векторов $f_1, \dots, f_n$ такой, что $f_i \perp f_j$ и $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$.

В первом случае мы выделяли полный квадрат, во втором применяли элементарные преобразования строчек и столбцов одновременно. В третьем мы пользовались формулой.

$$f_i = e_i - \sum_{j<i} \frac{\langle f_i, e_i \rangle}{\langle f_j, f_j \rangle} f_j.$$

Затем мы определили, что такое проекция вектора на подпространство. Последнее определение работало над $\mathbb{R}$ при заданном скалярном произведении (или над $\mathbb{C}$ в случае унитарного пространства, формула не меняется).

Определение 1. Пусть $U \leq V$ подпространство $x \in V$. Тогда ближайший к x вектор из U называется ортогональной проекцией x на U — $pr_U(x)$.

Факт. Пусть e_i — ортогональный базис V. Тогда для любого $x \in V$

$$\|x\|^2 = \sum \frac{\langle x, e_i \rangle^2}{\langle e_i, e_i \rangle},$$

причём $\frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$ — это i-ая координата вектора x в базисе e_i. В случае нормированного базиса формула упрощается.

Лемма 1. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — ортогональный базис U. Тогда для проекции x на U имеет место формула:

$$pr_U(x) = \sum \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

Замечание. Ортогональность базиса существенна. Собственно, расстояние $\rho(x, U)$ вычисляется как $\|x - pr_U(x)\|$. Отображение $V \to U$ заданное как $x \to pr_U(x)$ является линейным отображением и проектором.

Задачи

Задача 1. Пусть K – поле, V – векторное пространство над K и h — невырожденная симметричная билинейная форма на V. Покажите, что если ограничение формы h на $U \leq V$ тривиально (то есть 0), то $2 \dim U \leq \dim V$. Приведите пример формы чётной размерности, для которой оценка достигается.

Задача 2. Найти матрицу квадратичной формы $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, а так же найти систему координат, в которой она имеет вид суммы квадратов с коэффициентами. (всё над $\mathbb{R}$)

Задача 3. Пусть $V = \mathbb{R}[x]$. Рассмотрим скалярное произведение $\int_0^1 f(x)g(x)dx$. Ортогонализуйте относительно указанного скалярного произведения набор векторов $1, x, x^2, x^3$. (Будут знаменатели)

Задача 4. Посчитайте расстояние между пространством $\langle u, v \rangle$ и вектором x в $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, если

$$x = (1, 8, -6, 1), u = (3, 4, 5, -4), v = (1, 1, 1, -1).$$

Задача 5. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, а L — подмножество, заданное уравнением

$$L = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum a_i y_i = c\}.$$

Найдите выражение для расстояния от x до L. Скалярное произведение стандартное.

Подмножества типа L называются аффинными гиперплоскостями. Есть более общее понятие аффинного подпространства (но об этом позже).

Задача 6. Пусть $U_2 \le U_1 \le V$. Покажите, что $pr_{V \to U_2} = pr_{U_1 \to U_2} \circ pr_{V \to U_1}$.