Домашнее задание от 7 сентября 2017

Группа 102/2

Количество баллов на зачет: **7**

1. (1 балл). Сколько чисел нужно выбрать из последовательности

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2n\},$$

   чтобы среди них гарантированно нашлась хотя бы одна пара чисел, сумма которых была бы равна 2n + 1?

2. (1.5 балла). Имеется девять положительных целых чисел, ни одно из которых не имеет простого делителя, большего, чем 5. Доказать, что среди этих чисел найдутся по крайней мере два числа, произведение которых представляет собой квадрат некоторого целого числа.

3. (2 балла). Доказать, что в любой выборке из 52 положительных целых чисел найдутся хотя бы два, у которых либо их сумма, либо их разность делится на 100.

4. (2.5 балла) Доказать, что любая последовательность из $n^2 + 1$ различных целых чсел содержит либо убывающую, либо возрастающую подпоследовательность, состоющее из не менее чем $n + 1$ числа.
   Указание: рассмотрите для каждого a_i возрастающую последовательность максимальной длины с началом в a_i.

5. (1 балл). Внутри единичного квадрата разбросано десять точек. Доказать, что существуют хотя бы две из них, которые расположены ближе, чем 0.48, и хотя бы три из них, которые покрываются кругом, радиус которого равен 0.5.

6. (2 балла). Имеется произвольная последовательность $a_1, \ldots, a_n$ целых чисел, не обязательно различных. Доказать, что в такой последовательности обязательно найдется отрезок $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_l$, сумма элементов которого $\sum\limits_{i=k+1}^{l} a_i$ делится на n.

7. (2,5 балла). Футбольная команда за сезон отыграла 30 матчей и забила соперникам в совокупности 53 гола. Известно, что в каждой игре команда забивала хотя бы один гол. Доказать, что существует непрерывная последовательность игр, в течение которой команда забила ровно шесть голов. Останется ли утверждение верным в случае, если команда забъет не 53, а 60 голов?