Пул 1

1. Пусть в дереве T имеется четное количество ребер. Доказать, что в таком дереве обязательно найдется хотя бы одна вершина четной степени.

2. Доказать, что вершина x дерева T является точкой сочленения тогда и только тогда, когда ее степень строго больше единицы.

3. Доказать, что в любом дереве T, максимальная степень $\Delta(T)$ вершины в котором равна k, существует по меньшей мере k листьев. В каком дереве существует ровно k листьев?

4. Пусть T есть дерево, в котором степень любой вершины, смежной с листом дерева, имеет степень, большую или равную трем. Доказать, что в T обязательно найдется пара листьев, имеющих общего соседа.

5. Перечислить все возможные деревья на шести вершинах, у которых вершины 1 и 2 имеют степени, равные 2, а остальные вершины — степени, равные единице.

6. Используя рекуррентное соотношение из лекции, подсчитать количество остовных деревьев графа $K_{2,3}$.

Пул 2

1. Пусть G есть простой граф, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Доказать, что количество m ребер в таком графе лежит в диапазоне
$$n-k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

2. Рассмотрим произвольную неубывающую последовательность $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, $n > 2$ положительных натуральных чисел. Доказать, что равенство
$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n?2,\ d_i > 0$$
является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта последовательность была графовой для некоторого дерева T, построенного на n вершинах.

3. Используя рекуррентное соотношение из лекции, подсчитать количество остовных деревьев графа $K_1 \vee P_n$ “веер”, полученного добавлением к P_n вершины, смежной с каждой из вершин пути P_n. Можно ли выразить это количество через числа Фибоначчи?

4. Без использования рекуррентного соотношения и матричной теоремы о деревьях подсчитать количество остовных деревьев графа $K_{2,n}$.

5. Подсчитать количество различных непомеченных остовных деревьев графа $K_{2,n}$.

6. Используя матричную теорему о деревьях, подсчитать количество всех деревьев на n вершинах.

7. Используя формулу Кэли, доказать, что в графе $K_n - e$ имеется ровно $(n-2) \cdot n^{n-3}$ остовных деревьев.