1 Домашнее задание (обязательное)

Задание 1.1. Показать, что из равенства $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ не следует попарная независимость A_1, A_2, A_3.

Задание 1.2. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найти распределение поличества выпавших троек, количества выпавших четверок и их совместное распределение

Задание 1.3. Игральную кость бросали до тех пор, пока не выпадет шестерка. Известно, что результате двойка выпала трижды. Какое число бросаний кости наиболее вероятно?

Задание 1.4. Какова вероятность того, что две наугад выбранные кости домино можно приставить друг к другу?

Задание 1.5. В ящике 15 теннисных мячей, из которых 9 новые. Случайно выбирают для игры три, играют с ними и кладут обратно (после игры их уже считают неновыми). Для следующей игры снова достают три мяча. Какова вероятность того, что все они новые?

Задание 1.6. В урне лежит один шар, черный либо белый, с одинаковой вероятностью. В урну кладут n белых шаров, затем достают k наудачу. Они все оказываются белыми. Какова вероятность того, что все оставшиеся шары — белые?

Задание 1.7. Четверо играют в покер (без джокеров, замены и общей сдачи). Какова вероятность получить каре (четыре карты одного достоинства из пяти), если известно, что у соседа справа роял-флеш (пять карт одной масти, подряд, начиная с туза)?

Задание 1.8. В ящике лежит 6 деталей, при этом среди них могут быть бракованные (любое количество бракованных деталей равновероятно). В ящик положили еще две бракованных детали, затем извлекли наудачу одну. Какова вероятность того, что эта деталь исправна? Если деталь исправна, какое исходное число бракованных деталей наиболее вероятно?

Задание 1.9. Круглая мишень разделена на 10 колец и 4 прямоугольных сектора. Стрелок бьет по мишени и промахивается с вероятностью p, а в противном случае попадает в произвольную точку мишени. При каких p номер кольца и номер сектора будут независимы как случайные величины?

Задание 1.10. Два стрелка стреляют в круглую мишень, каждый попадает в случайную ее точку. Найти плотность распределения расстояния до центра мишени от точки попадания второго стрелка, если известно, что он оказался более близок к центру, чем первый?

2 Задачи, разобранные в классе

Задание 2.1. Показать, что из попарной независимости событий A_1, A_2, A_3 не следует их совместная независимость.

Задание 2.2. Привести пример: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — одинаково распределенные случайные величины, при этом любые $n-1$ из них совместно независимы, а все n — нет.

Задание 2.3. Привести пример: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — одинаково распределенные НЕПРЕРЫВНЫЕ случайные величины, при этом любые $n-1$ из них совместно независимы, а все n — нет.

Задание 2.4. Бросаются два кубика. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков равно 20, если сумма очков равна 9?

Задание 2.5. Из партии в пять изделий взято одно, оказавшееся бракованным. Исходно было известно, что количество бракованных изделий равновозмжно любое. Какое количество бракованных изделий наиболее вероятно?

Задание 2.6. Саша и Антон играют в игру. Саша подбрасывает монету до тех пор, пока не выпадет орел. В это время Антон бросает игральный кубик (на каждое бросание монеты) и суммирует выпавшие очки. В итоге Антон получил в сумме 5 очков. Какое число бросков кости он совершил с наибольшей вероятностью? *Я немного исправил условие, теперь задачу можно решить без компьютера*

Задание 2.7. В урне лежит один шар, черный либо белый, с одинаковой вероятностью. В урну кладут один белый шар, затем достают один наудачу. Он оказывается белым. Какова вероятность того, что оставшийся шар — белый?

Задание 2.8. Из десяти стрелков пять попадают в цель с вероятностью, равной 80% , три — с вероятностью, равной 50%, и два — с вероятностью 90%. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

Задание 2.9. Три охотника охотились на кабана. Первый бьет кабана с одного выстрела с вероятностью 0.4, второй — с вероятностью 0.3, а третий — с вероятностью 0.2. Они одновременно заметили кабана и одновременно встрелили. Когда они подошли к убитому кабану, выяснилось, что он был убит одной пулей. Какова вероятность, что его убил второй охотник?

Задание 2.10. Из десяти стрелков пять попадают в цель с вероятностью, равной 80% , три — с вероятностью, равной 50%, и два — с вероятностью 90%. Какова вероятность того, что наудачу выбранный стрелок поразит цель?

Задание 2.11. Предположим, что у нас имеются три монетки, две из которых правильные, а третья является несимметричной, вероятность выпадения орла у которой $p = 1/3$. Мы случайным образом выбираем из этих трех монеток одну и подбрасываем ее пять раз. В результате такого эксперимента у нас один раз выпадает орел и четыре раза решка. Какая монетка была выбрана с большей вероятностью — идеальная или несимметричная?

Задание 2.12. По монете ударяют молотком и она случайным образом изгибается: вероятность выпадения орла становится $p \sim U[0, 1]$ — равномерно распределена от 0 до 1. После чего монету подбрасывают дважды. Какова вероятность выпадения двух орлов?

3 Более трудные задачи

Задание 3.1. Привести пример $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — одинаково распределенные случайные величины такие, что любые $k < n$ из них совместно независимы,а любые $k+1$ — нет.