Диаграманая техника. Композиция экспоненциальных производящих функций. Формула Фаа ди Бруно.

21 мая 2017 г.

1. Сколькими способами можно разбить группу из тридцати студентов на пары и тройки для совместной работы над курсовым проектом?

2. Предположим теперь, что мы не только разбиваем тридцать студентов на пары и тройки, но ещё и выделяем в каждом курсовом проекте несколько частей так, что в парах студенты могут распределить эти части между собой для работы над ними a_2 способами, а в тройках — a_3 способами. Подсчитать количество способов совершить данные комбинаторные действия, выразив ответ через полиномы Белла $B_{n,k}$.

3. Доказать, что $p^2(n) < p(n^2 + 2n)$ при $n \geq 1$.

4. С использованием диаграмм Ферре показать, что количество разбиений числа n ровно на k частей равно количеству разбиений числа $n + k(k-1)/2$ ровно на k неравных частей.

5. Показать из комбинаторных соображений, что при фиксированном k и $n \to \infty$
$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!}.$$

   Указание: Использовать сравнение числа $p_k(n)$ с количеством решений уравнения
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \qquad x_i \geq 1$$
   с учетом порядка слагаемых, а также результат предыдущего упражнения.

6. Матрицей P_σ перестановки σ называется квадратная бинарная матрица, в любой строке и в любом столбце которой находится ровно одна единица. При этом для любой i-й строки единица стоит в столбце, отвечающем $\sigma(i)$. Например, для перестановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

матрица P_σ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построить экспоненциальную производящую функцию $H(z)$ для количества a_n всех *симметричных* матриц P_σ. Получить с помощью этой функции рекуррентное соотношение на числа a_n. Дать комбинаторную интерпретацию полученного рекуррентного соотношения.

7. Построить экспоненциальную производящую функцию, описывающую количество регулярных простых графов степени 2.

8. Построить экспоненциальную производящую функцию, описывающую количество регулярных простых графов степени 2.

   Числа Лаха $L_{n,k}$ (Lah numbers) описывают количество способов разбить n различимых объектов на k непустых блоков, а затем линейно упорядочить элементы в каждом блоке. Показать, что числа Лаха рассчитываются по формуле

$$L_{n,k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!}\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}, \tag{1}$$

   построив полуэкспоненциальную производящую функцию

$$H(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot L_{n,k}.$$