ДЗ 9. Кососимметрические тензоры и немного про категории

Вернёмся к вопросам, связанным с теорией категорий. А именно, пусть K–поле. Рассмотрим категорию $K - Alg$ – коммутативных алгебр над полем K. Наш текущий вопрос – как описать копроизведение в этой категории (и понять, что оно есть). Поступим следующим образом: для привычности ограничимся только конечнопорождёнными алгебрами. И, для начала, рассмотрим случай, когда обе алгебры это кольца многочленов $A = K[x]$ и $B = K[y]$. Итак, я должен построить алгебру R и пару гомомморфизмов $i_1 \colon A \to R$ и $i_2 \colon B \to R$, так, что задание пары гомоморфизмов $K[x] \to D$ и $K[y] \to D$ однозначно определяет $R \to D$. Заметим, что каждый гомоморфизм $K[x] \to D$ однозначно задаётся элементом из D. Таким образом нам необходимо найти алгебру, гомоморфизм из которой задаётся парой элементов. Это, конечно, $K[x, y]$.

Аналогично
$$K[x_1, \dots, x_n] \coprod K[y_1, \dots, y_m] = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m].$$
Теперь, что же делать с произвольной конечно порождённой алгеброй? Любая такая алгебра задаётся как фактор $A = K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_l)$. Для того, чтобы задать гомоморфизмы из такой алгебры надо отправить образующие в корни системы $f_1 = \dots = f_l = 0$. Теперь, если есть алгебра $B = K[x_1, \dots, x_m]/(g_1, \dots, g_k)$, то $A \coprod B = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]/(f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k)$.

Это вычисление использовало какой-то выбор системы образующих. Предъявим конструкцию, которая не обладает этим недостатком и работает «бескоординатно». Пусть есть две алгебры A и B, то подходит
$$A \otimes B \text{ с умножением } a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2 = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

Вложение $i_1 \colon A \to A \otimes B$ устроено как $a \to a \otimes 1$. Если есть пара гомоморфизмов $f \colon A \to D$ и $g \colon B \to D$, то есть отображение заданное на тензорах как $a \otimes b \to f(a) \cdot g(b)$.

Таким образом у нас есть конструкция – тензорное произведение алгебр и благодаря тому, что у нас есть первое вычисление, мы умеем его считать, если представим наши алгебры, как факторы кольца многочленов.

Например,
$$\mathbb{Q}[i] \otimes \mathbb{Q}[i] \cong \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 + 1, y^2 + 1) \cong \mathbb{Q}[i][y]/(y^2 + 1) = \mathbb{Q}[i] \times \mathbb{Q}[i].$$
Последнее вычисление следует из китайской теоремы об остатках. В общем, есть ещё одно важное замечание:

Факт. Пусть A и B – алгебры над полем K. предположим, что A – само по себе поле (тензорное произведение вообще определено не обязательно над полем, но у нас было только такое определение). На тензоном произведении $A \otimes B$ есть структура A-алгебры. Вот подходящее описание для структуры A-алгебры
$$K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_l) \otimes A \cong A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_l).$$
Здесь, конечно, многочлены $f_1, \dots, f_l$ интерпретируются как многочлены с коэффициентами в A.

Например,
$$\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 - 2) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Теперь немного фактов о внешней степени и симметрической степени. Пусть есть V векторное пространство над полем характеристики 0 (можно и не 0, но сложнее). Определим пространство $\Lambda^k V$ как подпространство $V^{\otimes k}$. Это подпространство выделяется следующими условиями – для любой перестановки из $\sigma \in S_k$ и любого тензора $a \in \Lambda^k V$ верно, что $a^\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) a$. Под a^σ подразумевается действие перестановки σ на тензор a перестановкой его компонент. Аналогично определяется подпространство $\operatorname{Sym}^k V \le V^{\otimes^k}$, чьи элементы удовлетворяют свойству: $a^\sigma = a$.

Факт. Имеет место проектор $V^{\otimes k} \to \Lambda^k$ заданный формулой
$$a \to \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) a^\sigma.$$

Аналогично отображение
$$a \to \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} a^\sigma$$
есть проектор на подпространство $\operatorname{Sym}^k V$.

Определение 1. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ набор элементов из V. Определим элементы $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \in \Lambda^k V$ как образы при проекции $e_1 \otimes \cdots \otimes e_k$.

Факт. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис пространства V. Тогда элементы $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ образуют базис пространства $\Lambda^k V$. В частности размерность $\dim \Lambda^k V = C_n^k$.

Факт. Аналогично, пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис пространства V. Тогда элементы образы тензоров $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$, где $i_1 \leq \cdots \leq i_k$ образуют базис пространства $\Lambda^k V$.

Факт. Определим функтор из категории векторных пространств в себя, который пространству V сопоставляет пространство $\Lambda^k V$, а линейному отображению $f \colon V \to W$ – отображение $A^{\wedge k} = \Lambda^k(A) \colon \Lambda^k V \to \Lambda^k W$ заданное по правилу $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \to Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_k$.

Замечание. Это просто ограничение отображения $V^{\otimes k} \to W^{\otimes k}$ на кососимметрические тензоры – так проще всего понять, что композиция переходит в композицию. Аналогично определяется отображение $\operatorname{Sym}^k V \to \operatorname{Sym}^k W$, и, следовательно, задаётся функтор Sym^k.

Факт. Пусть A — оператор на V. Тогда собственные числа $A^{\wedge k}$ можно описать так. Пусть $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, такое что $|I| = k$. Любому такому подмножеству можно сопоставить собственное число $A^{\wedge k}$ равное $\prod_{i \in I} \lambda_i$, где λ_i – собственные числа A.

И напоследок ещё набор полезных фактов.

Факт. Полезно смотреть не на пространства $\Lambda^k(V)$ и $\operatorname{Sym}^k V$, а на пространства $\Lambda^k(V^*)$ и $\operatorname{Sym}^k(V^*)$, потому что они допускают привычную и наглядную интерпретацию — их элементы это полилинейные функции со специальными свойствами.

Примеры:
1) Элемент $\Lambda^2(V^*)$ — это просто кососимметрическая билинейная форма.
2) А элемент $\operatorname{Sym}^2 V^*$ – это симметрическая билинейная форма или просто квадратичная форма.
3) Элемент $\Lambda^{\dim V} V^*$ – это просто форма объёма на V.
4) Заметим, что продолжая аналогию с квадратичными формами, выбор базиса задаёт изоморфизм

$$\operatorname{Sym}^k V^* \cong K[x_1, \ldots, x_n]_{\deg = k}$$

с пространством однородных многочленов степени k (n – размерность пространства). Последнее отображение устроено следующим образом – элементу $a \in \operatorname{Sym}^k V^*$ сопоставим отображение, которое на векторе $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ выдаёт $a(v, \ldots, v)$. То есть

$$a \to (v \to a(v, \ldots, v)).$$

Это будет однородный многочлен от координатных функций $x_1, \ldots, x_n$. Осталось заметить, что проекция тензора $e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}$ после применения такой операции — это многочлен $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.

Факт. Так же полезно помнить интерпретацию разных обычных тензоров. Например, линейный оператор – это тензор из $V \otimes V^* = V^{1,1}$, а структура алгебры на V – это тензор из $V^* \otimes V^* \otimes V = V^{2,1}$.

Задачи

Задача 1. Возьмите какой-нибудь базис $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ и выпишете тензор, который соответствует умножению на $\mathbb{C}$. Не забывайте обозначения e^i, e_i для разных типов тензоров.

Задача 2. Найдите $\det \Lambda^k A$, если известен определитель A.

Задача 3. Пусть A – нильпотентный оператор на V. $\dim V = 3$ и A имеет одну клетку размера 3. Найдите ж.ф. $\Lambda^2 A$.

Задача 4. Пусть $\dim V = n$ и A – оператор на V. Покажите, что $\Lambda^{n-1} A$ либо 0, либо обратим, либо имеет ранг $n - 1$.

Задача 5. Чему изоморфна $\mathbb{R}$-алгебра $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1) \otimes \mathbb{R}$?