Тема №8. Экспоненциальная и композиционная формулы

1. Давайте еще раз вспомним определение и комбинаторный смысл экспоненциальных производящих функций.

1)

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$G(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + b_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Пусть F(x) и G(x) это пара экспоненциальных производящих функций. Тогда по определению произведением этих функций называется формальный степенной ряд вида:

$$H(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

2) Комбинаторный смысл этой функции следующий: у нас есть n-элементное множество различных элементов (например, множество сидящих в аудитории студентов). Я разделяю это множество на 2 блока, т.е. разделяю [n] на два различных подмножества (возможно пустых), таких, что их объединение дает мне все n-множество. Например, я разбиваю множество сидящих в аудитории студентов на 2 группы, 1-ю отправляю в 433-ю аудиторию, а 2-ю — в 431-ю аудиторию, и эти аудитории я различаю. Затем над элементами 1-го блока, содержащего i элементов, я совершаю комбинаторное действие a_i способами. А над элементами 2-го блока, содержащего $(n-i)$ элементов, выполняю второе комбинаторное действие b_{n-i} способами. Например, в первом блоке я выбираю одного студента $a_i = i$ способами, чтобы он вышел к доске, а во втором блоке (431-я аудитория) — 2-х студентов $\binom{n-i}{2}$ способами, чтобы они сходили в учебный отдел за мелом.

Тогда при фиксированном i я $\binom{n}{i}$ способами выбираю i студентов в первую подгруппу, совершаю над ними комбинаторное действие a_i способами, а затем над оставшимися студентами 2-ой подгруппы b_{n-i} способами совершаю 2-е комбинаторное действие, следовательно имею $\binom{n}{i} a_i b_{n-i}$ способов это сделать. Но т.к. i на самом деле не фиксировано, то мне нужное просуммировать все это дело от 0 до n, откуда и поулчается коэффициент c_n.

3) Теперь понятно, как обобщить все это дело на случай k производящих функций. Мне сейчас понадобится частный случай, при котором все эти экспоненциальные производящие функции одинаковы и равны $F(x)$. Тогда

$$H(x) = [F(x)]^k = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{x^n}{n!}$$

$$c_n = \sum_{i_1 + \cdots + i_k = n, i_m \geq 0} \binom{n}{i_1} \binom{n - i_1}{i_2} \cdots \binom{n - i_1 - \cdots - i_{k-1}}{i_k} a_{i_1} \cdots a_{i_k}$$

Причем суммирование идет по всем решениям уравнения $i_1 + \cdots + i_k = n$ в неотрицательных целых числах с учетом порядка следоваия слагаемых (это значит, что $1 + 2 + 1 \neq 2 + 1 + 1$).

Комбинаторный смысл: я разделяю n-множество на k блоков, различных, часть которых могут быть пустыми, но объединение которых дает все n-множество. Как я это делаю? Я $\binom{n}{i_1}$ способами отбираю элементы в первый блок, $\binom{n-i_1}{i_2}$ способами во второй блок, ..., $\binom{n-i_1-\cdots-i_{k-1}}{i_k} = 1$ в k-й блок, а затем в каждом блоке совершаю действие a_{i_m} количеством способов. Тогда c_n это общее количество способов совершить такие действия.

2. Теперь несколько усложним задачу, а именно: предположим, что количество блоков k, на которые мы разбиваем n-множество, заранее не фиксируется, т.е. может быть любым. Как быть в таком случае? Казалось бы, ответ очевиден - нужно взять и просуммировать $[F(x)]^k$ по всем возможным значения k.

1) Как только k перестает быть фиксированным, то мы сразу же должны исключить возможность того, что в разбиении могут присутствовать пустые блоки. Почему? Потому что при нефиксированном k мы этих пустых блоков можем навставлять сколько угодно, и количество вариантов разбиения станет бесконечным.

2) Как обеспечить это формально? Достаточно положить $a_0 = 0$, т.е. мы запрещаем совершать какие-либо комбинаторные действия с пустыми множествами.

С алгоритмической точки зрения мы считаем сумму $\sum_{k=0}^{+\infty}[F(x)]^k$, а затем собираем коэффициенты при $\frac{x^n}{n!}$. Тогда при $a_0 = 0$: как только k станет больше n, так сразу $F^k(x)$ можно не учитывать. Почему? Да потому, что

$$a_1x + a_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n\frac{x^n}{n!} + \cdots]^k = x^k[a_1 + a_2\frac{x}{2!} + \cdots + a_n\frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots]^k$$

и при $k > n$ все эти члены ряда дадут нам степени больше n, следовательно их можно не учитывать. Иными словами, для $\forall$ конкретного n нам достаточно вычислить конечную сумму $\sum_{k=0}^{n}[F(x)]^k$, т.е. для нахождения коэффициента c_n необходимо совершить конечное число действий.

3) Теперь можно все так и оставить. Но блоки у нас линейно упорядочены, а на практике чаще всего интереснее случай, когда блоки неупорядочены. Мы знаем, что $F^k(x)$ это случай разбиения на k линейно упорядоченных блоков (ящиков). Тогда мы знаем, что если у нас есть некое k-множество различных элементов (блоков), то $\exists k!$ способов его линейно упорядочить (если они, конечно, не пусты, т.е. все они содержат различные элементы исходного множества, следовательно они различаются). Как следствие, имеется $\frac{F^k(x)}{k!}$ способов разбить n-множество на k линейно неупорядоченных блоков.

Th1 (экспоненциальная формула). Пусть a_n — количество способов совершить комбинаторное действие над n - элементным множеством (т.е. неупорядоченным множеством различных элементов). Считаем при этом, что $a_0 = 0$. Пусть c_n это количество способов разбить n - множество (т.е. представить как неупорядоченное множество непустых попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых дает все n - множество) на заранее не определенное число k блоков, а затем во всех этих блоках совершить комбинаторное действие a_{i_m} способами, где i_m - размер m-го блока ($i_m \geq 1$. Положим $c_0 = 1$ и обозначим $F(x)$ и $H(x)$ экспоненциальные производящие функции последовательностей a_n и c_n соответственно. Тогда:

$$H(x) = e^{F(x)} = 1 + \frac{F(x)}{1!} + \frac{F^2(x)}{2!} + \cdots + \frac{F^n(x)}{n!} + \cdots$$

Это и есть знаменитая экспоненциальная формула.

3. Пример. В комнате находится n детей. Эти дети разбиваются на группы (непустые, естественно), и в $\exists$ устраивают хоровод следующим образом: один из детей становится в центр круга, а оставшиеся $i-1$ детей образуют хоровод. При этом хоровод может состоять как из нескольких детей, так и из одного ребенка, соединившего руки. Но при этом в центре каждого хоровода один ребенок стоять обязан. Сколькими способами это можно сделать? 1) Сосчитаем a_i. Очевидно, что $a_0 = a_1$. $a_i = i(i-2)!$ - я i способами могу могу выбрать ребенка и поставить его в центр и $(i-2)!$ способами расставить оставшихся детей по кругу. 2) Тогда

$$F(x) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots = x(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots) \ = xln\frac{1}{1-x}$$

Так как:

$$(ln\frac{1}{1-x})' = -((ln(1-x))' = (-1)\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \Rightarrow$$

$$\int (ln\frac{1}{1-x})' \,\mathrm{d}x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

3) Наконец, $H(x) = e^{F(x)} = e^{xln(\frac{1}{1-x})} = e^{ln(\frac{1}{1-x})^x} = \frac{1}{(1-x)^x}$

4) Ответ получили, но что с ним теперь делать? Как из него вытащить коэффициент c_n?

4. Оказывается, это легко сделать, как в общем, так и в этом случае.

1) Действительно, возьмем формулу $H(x) = e^{F(x)}$ и продифференцируем ее по x:

$$H'(x) = e^{F(x)}F'(x) = H(x)F'(x) \iff$$

$$c_1 + \frac{c_2}{1!}x + \frac{c_3}{2!}x^2 + \cdots + \frac{c_{n+1}}{n!}x^n + \cdots + =$$

$$= (c_0 + \frac{c_1}{1!}x + \frac{c_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{c_n}{n!}x^n + \cdots +)(a_1 + \frac{a_2}{1!}x + \frac{a_3}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_{n+1}}{n!}x^n + \cdots +)$$

2) Но как перемножать две производящие функции мы уже знаем:

$$c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i+1}c_{n-i} \iff a_{i+1} = c_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a_{i+1}c_{n-i}$$

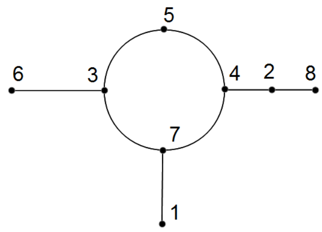
5. Давайте сразу обобщим экспоненциальную формулу.

1) В экспоненциальной формуле мы разбиваем n-элементное множество на неупорядоченные блоки, совершаем комбинаторное действие a_{i_m} способами над элементами m - го блока, а сами блоки не трогаем.

2) Если же мы теперь захотим совершить второе комбинаторное действие над k блоками b_k способами, то при $\forall$ фиксированных значения k получим $\frac{b_k}{k!}F^k(x)$ способов это сделать. Суммируя по всем k получим $H(x) = G(F(x))$, где

$$G(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + b_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

6. Пример. Найти количество способов разбить людей в цепочки (линейно упорядоченные подмножества), а затем расставить эти цепочки в циклическом порядке. Например:



1) Имеется $a_i = i!$ способов расставить i людей в цепочки и $b_k = (k-1)!$ способов расставить k блоков по кругу

$$F(x) = \frac{1}{1-x}, G(x) = ln\frac{1}{1-x} + 1$$

2) Тогда:

$$H(x) = 1 + ln\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = 1 + ln\frac{1-x}{1-2x} = 1 + ln(1-x) + ln\frac{1}{1-2x} = 1 - ln\frac{1}{1-x} + ln\frac{1}{1-2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_0 = 1, c_n = 2^n(n-1)! - (n-1)! = (2^n - 1)(n-1)!$$

3) Поскольку ответ получился простым, то мо можно придумать и простое комбинаторное доказательство. А именно, расставим n людей в круг $(n-1)!$ способами. В каждом из n промежутков между людьми можно либо провести, либо не провести черту, делящую их на линейные цепочки, но при этом одна черта всегда должна быть, итого $2^n - 1$ способов.

7. Замечание. Вообще говоря, мы уже наблюдали 3 разных, но очень важных частных случая композиционной формулы:

1) $b_n = 1 \forall n = 0, 1, 2, \cdots$ — это экспоненциальная формула, и $H(x) = e^F(x)$. Она означает, что с блоками мы комбинаторных действий не совершаем. 2) $b_n = n! \forall n = 0, 1, 2, \cdots$ — это случай, когда мы блоки линейно упорядочиваем. В этом случае

$$H(x) = 1 + F(x) + F^2(x) + \cdots + F^n(x) + \cdots = \frac{1}{1-F(x)}$$

3) $b_n = (n-1)! \forall n = 1, 2, 3 \cdots, b_0 = 1$ — это случай, когда мы блок циклически упорядочиваем:

$$H(x) = 1 + F(x) + \frac{F^2(x)}{2} + \frac{F^3(x)}{3} + \cdots + \frac{F^n(x)}{n} + \cdots + = 1 + ln \frac{1}{1 - F(x)}$$

8. Ну хорошо. Хороводы, цепочки, это все очень мило. На самом деле при помощи композиционной формулы можно решать множество важных и нетривиальных задач.

Важный пример №1. Перечисление всех помеченных графов (без петель и кратных ребер) на n-элементном множестве различимых вершин.

1) Что такое помеченный граф? Это множество [n] вершин, любая пара которых может быть соединена или не соединена ребром. Сколько существует возможных пар вершин? Очевидно, что $\binom{n}{2}$ пар вершин. Тогда любой граф это есть некоторое подмножество этого множества пар вершин. Например, пустому подмножеству соответствует граф из n изолированных вершин, а подмножеству из ровно $\binom{n}{2}$ вершин - полный граф K_n.

2) Мы знаем, сколько всего существует подмножеств у данного множества, следовательно количество всех графов $c_n = \binom{n}{2}$

3) Задача: найти, например, количество всех связных графов на n вершинах a_n. Более или менее понятно, что т.к. любой граф состоит из некоторого числа компонент связности, то знчит числа a_n и c_n должны быть как-то связаны. Как?

4) Переформулируем задачу. Пусть имеется n - элементное множество - множество вершин. Пусть a_n это количество способов построить на n вершинах односвязный граф. Очевидно, что тогда любой граф, состоящий из k односвязных компонент получается путем разбиения n множества [n] на k непустых неупорядоченных блоков и построении на каждом из этих блоков размером i_m связного графа. Количество способов построить такой односвязный граф $= a_{i_m}$. Количество способов построить k - связный граф =

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i_1 + \cdots + i_k = n, i_m \geq 1} \frac{n!}{i_1! \cdots i_k} a_{i_1} \cdots a_{i_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^F(x) = e^{a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots}$$

Теперь, используя ранее выведенное рекуррентное соотношение для c_{n+1}:

$$c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{i+1} c_{n-i} \iff a_{i+1} = c_{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a_{i+1} c_{n-i}$$

где $c_n = 2^{\binom{n}{2}}$

Нам понадобится еще один важный пример

Важный пример №2

1) Мы рассматриваем случай, когда у нас $b_n = 1$. А давайте теперь рассмотрим самый простейший случай, когда $a_0 = 0, a_i = 1 \forall i = 1, 2, \ldots$. Чему он соответсвует?

2) Мы берем n-элеметное множество, разбиваем его на непустые неупорядоченные блоки - и все, мы с ними самими ничего не делаем, ни с элементами в них ничего не делаем. Но: мы с такой задачей уже сталкивались — число способов сделать это $= B_n$ – числа Белла. Так вот, из общей теории сразу же получаются:

а) Производящая функция для чисел Белла:

$$H(x) = B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots = e^{e^x - 1}$$

б) Рекуррентное соотношение для чисел Белла:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$$

10. Но, помнится, что мы могли решать и более сложную задачу – мы умеем определять количество разбиений n элементного множества ровно на k блоков. И это количество — числа $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ Стирлинга 2-го рода. Вопрос: можно ли их получить из этой теории? Из этой же серии: а можно ли найти количество графов, имеющих ровно k компонент связности?

1) Оказывается, что можно, и делать это нужно следующим образом. Вернемся к композиционной формуле и в качестве b_k возьмьем t^k, где t это некоторый параметр. Этот выбор означает следующее: ме приписываем $\forall$ разбиению, содержащему ровно k блоков вес (или метку) t^k.

2) При этом получаем:

$$H(x) = 1 + t^1 \frac{F^1(x)}{1!} + t^2 \frac{F^2(x)}{2!} + \cdots + t^k \frac{F^k(x)}{k!} + \cdots = H(x,t) =$$

$$= c_0 + c_1(t)x + c_2 t \frac{x^2}{2!} + \cdots + c_n(t) \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

где

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k) t^k; c(0,0) = 1; c(n,0) = 0 \forall n > 0$$

3) Очевидно, $c_n(1) = c_n$ — возвращаемся к экспоненциальной формуле
Далее, $c(n,1) = a_n$ — количество способов взять n-элементное множество и совершить над ним комбинаторное действие

Тогда комбинаторный смысл $c(n,k)$ это количество способов взять n - элементное множество, разбить его ровно на k блоков (неупорядоченных непустых блоков, объединение которых дает все n - множество) размером $i_1, \ldots, i_k$ и в $\forall m$-м блоке размера i_m совершить комбинаторное действие №1 a_{i_m} числом способов. При этом

$$c_n = c_n(1) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)$$

4) Еще раз:

$$H(x,t) = 1 + t^1\frac{F^1(x)}{1!} + t^2\frac{F^2(x)}{2!} + \dots + t^k\frac{F^k(x)}{k!} + \dots = H(x,t) =$$

$$H(x) = 1 + t^1H_1(x) + t^2H_2(x) + \dots + t^kH_k(x) + \cdots, H_k(x) = \frac{F^k(x)}{k!}$$

Формально: $H(x,1) = H(x) = 1 + F(x) + \frac{F^2(x)}{2!} + \dots + \frac{F^k(x)}{k!} + \dots = e^{F(x)} \iff$

$$F(x) = lnH(x)$$

Тогда очевидно, что $H_k(x) = \frac{F^k(x)}{k!} = \frac{1}{k!}[lnH(k)]^k$, т.е. выражается через H(x). При этом т.к.

$$H_k(x) = \sum_{n\geq 0} c(n,k)\frac{x^n}{n!}, \text{то}$$

мы получаем формулу, формально выражающую $c(n,k)$ через c_n:

$$\sum_{n\geq 0} c(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}[ln(c_0 + c_1x + c_2\frac{x^2}{2!} + \dots + c_n\frac{x^n}{n!} + \cdots]^k)$$

5) Еще одно формальное равенстово:

$$H(x,t) = 1 + t^1\frac{F^1(x)}{1!} + t^2\frac{F^2(x)}{2!} + \dots + t^k\frac{F^k(x)}{k!} + \dots = e^{tF(x)} = [e^F(x)]^t = [H(x)]^t$$

6) Пример — производящая функция для чисел Стирлинга второго рода:

$$F(x,t) = e^{t(e^x-1)}$$