

Домашнее задание по математическому анализу №1 на 27 февраля
Тема: построение графиков, неопределённые, определённые интегралы

Исследовать функции, опираясь на следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках. Установить интервалы монотонности функции.
6. Найти точки перегиба графика функции, вычислить значения функции и значения производной в этих точках. Установить интервалы выпуклости графика функции.
7. Используя результаты исследования, построить график функции. При необходимости уточнить отдельные участки кривой, можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек (в частности, координаты точек пересечения с осями координат).

Указанную схему следует рассматривать как сугубо примерную. В частности, эскиз графика рекомендуется набрасывать уже после нахождения асимптот (если они имеются) и во всяком случае до нахождения точек перегиба. Однако следует помнить, что основными ориентирами при построении графика функции являются точки кривой, соответствующие экстремальным значениям функции, точки перегиба, асимптоты.

1. (3 балла) $f(x) = (x + 1)^3 \sqrt[3]{x^2}$.

2. (3 балла) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + 1}$.

3. (3 балла) $f(x) = \sin(2x) + 2 \cos(x)$.

Вычислить неопределённые интегралы

4. (1 балл)

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx;$$

5. (1 балл)

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}};$$

6. (1 балл)

$$\int \operatorname{cth}^2 dx;$$

7. (1 балл)

$$\int \frac{dx}{1 - \cos(x)};$$

8. (1 балл)

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx;$$

9. (1 балл)

$$\int \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} dx;$$

10. (2 балла)

$$\int x \arcsin(x + 1) dx$$

11. (1 балл)

$$\int \frac{2x - 1}{\sqrt{-7 + 6x + x^2}} dx$$

12. (1 балл)

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

13. (1 балл)

$$\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 10x - 11}} dx$$

14. (7 баллов)

$$\int x e^x \sin^2(x) dx$$

15. (7 баллов)

$$\int x \operatorname{arctg}(x) \ln(1 + x^2) dx$$

16. (2 балла) Познакомьтесь с трансцендентной функцией

$$\operatorname{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln(x)}.$$

Выразите через неё неопределённый интеграл

$$\int \frac{x e^x}{(x + 1)^2} dx$$

17. (2 балла) Докажите, что $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ при $x \rightarrow +\infty$.

18. (2 балла) Докажите, что

$$1 < \int_0^1 \frac{1 + x^{20}}{1 + x^{40}} dx < 1 + \frac{1}{42}.$$