Практика по алгоритмам #1
Тема: асимптотика

2 сентября

Собрано 8 сентября 2015 г. в 14:29

Содержание

1 Теория

- $f = O(g) \quad \exists N, C > 0\colon \forall n \geq N, f(n) \leq C \cdot g(n)$
  Или более грубо: $\exists C > 0\colon f \leq C \cdot g$ при достаточно больших n.
  И еще более грубо: $\exists C > 0\colon f \leq C \cdot g$.
  Далее везде будем использовать самый грубый вариант и опускать слова "при достаточно больших n".

- $f = o(g) \quad \forall C > 0\colon f(n) < C \cdot g(n)$
  По-другому: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f}{g} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\colon \frac{f}{g} < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\colon f < \varepsilon g$

- $f = \Theta(g) \quad \exists A, B > 0\colon A \cdot g \leq f \leq B \cdot g$

2 Первая порция задач

Найдите короткую запись через Θ. Если такой не существует, объяснить, почему, и записать через O.

1. $2n$
2. $2n + 1$
3. $n^2 + 5n + 1$
4. $\frac{n^2+3}{7n+1}$
5. $n(2 + \sin n)$
6. $n(1 + \sin n)$
7. $\frac{\operatorname{arctg} n}{n} + \frac{\log \log n}{\log n}$
8. Докажите: $\forall f, g > 0\colon f + g = \Theta(\max(f, g))$

3 История про синус

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0, y \in [-1..1] \quad \exists n \in \mathbb{N}\colon |y - \sin n| < \varepsilon$.

π иррационально $\Rightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\colon (i \mod 2\pi) \neq (j \mod 2\pi)$. Рассмотрим первые n натуральных чисел, им соответствуют разные остатки по модулю 2π, то есть разные точки на единичной окружности. Есть две точки i и j на расстоянии не больше $\varepsilon = \frac{2\pi}{n}$. $(|j - i| \mod 2\pi) \leq \varepsilon$. Рассмотрим точки $x = \arcsin y, k = \lfloor \frac{x}{|j-i|} \rfloor \Rightarrow |y - \sin(k|j - i|)| < \varepsilon$

4 Доказательство того, что $(\log n)^{100} < n^{1/3}$

Докажем, что $\forall a > 0, C > 1 \colon n^a = O(C^x)$.
По ходу доказательства предполагаем, что мы не знакомы с производными, пределами...

1. $n^a = O(C^n)$
2. $n^a \leq C^n \quad |$ докажем для константы 1
3. $n^a \leq 2^{n \log C} \quad | \ C = 2^{\log C}, (a^b)^c = a^{cb}$
4. $n \leq 2^{n \frac{\log C}{a}} \quad |$ возвели в степень $\frac{1}{a}$
5. $n \leq 2^{nC_2} \quad | \ C_2 = \frac{\log C}{a}$
6. $zC_3 \leq 2^z \quad | \ z = nC_2, C_3 = (C_2)^{-1}$
7. Достаточно доказать при достаточно больших z. Пусть $z \geq C_3$, осталось $z^2 \leq 2^z$. Докажем по индукции, далее база и переход.
8. $z \in [10..11) \Rightarrow z^2 \leq 2^z$ и $2z + 1 \leq z^2$
9. $(z+1)^2 = z^2 + (2z+1) \leq z^2 + z^2 \leq 2^z + 2^z = 2^{z+1}$ и
   $2(z+1) + 1 = (2z+1) + 2 \leq z^2 + 2 \leq z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0, a > 0 \colon n^\varepsilon = \Omega(\log^a n)$.

1. $n^\varepsilon \geq \log^a n \quad |$ докажем для константы 1
2. $(e^\varepsilon)^k \geq k^a \quad | \ \log n = k, e^k = n$
3. $C^k \geq k^a \quad | \ C = e^\varepsilon$, свели к предыдущей задаче

5 Проверьте корректность, докажите

1. $2^{n+3} = \Theta(2^n)$
2. $2^{2n+1} = \Theta(2^n)$
3. $g(n) = O(f(n)) \Rightarrow 2^g(n) = O(2^f(n))$
3. $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow 2^g(n) = o(2^f(n))$
4. $f(n) + g(n) = \Theta(\frac{f(n)+g(n)}{2})$
5. $n^{logn} = O(1.1^n)$
6. $\frac{n^3}{n^2 + n \log n} = O(n \log n)$
7. $f(n) = O(f(\frac{n}{2}))$
8. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$
9. $\log n! = \Theta(n \log n)$
10. $n^n = O(n!)$
11. $n \log n - \log n! = \Theta(n)$

6 Домашнее задание

1. 4.{5,6,7,8,9}
   При решении 4.5 можно ссылаться на уже доказанные факты.

2. Заполнить табличку. $A = O(B)$? $A = o(B)$? и т.д.

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\lg^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\lg m}$	$m^{\lg n}$					
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

3. Упорядочить функции в порядке возрастания. Если какие-то функции равны ($f = \Theta(g)$), указать это. Здесь $\lg n$ — двоичный логарифм, $\ln n$ — натуральный логарифм.

$$\begin{array}{cccccc}
\lg(\lg^* n) & 2^{lg^* n} & (\sqrt{n})^{\lg n} & n^2 & n! & (\lg n)! \\
(3/2)^n & n^3 & \lg^2 n & \lg n! & 2^{2^n} & n^{1/\lg n} \\
\ln \ln n & \lg^* n & n \cdot 2^n & n^{\lg \lg n} & \ln n & 1 \\
2^{\ln n} & (\lg n)^{\lg n} & e^n & 4^{\lg n} & (n+1)! & \sqrt{\lg n} \\
\lg^* \lg n & 2^{\sqrt{2 \lg n}} & n & 2^n & n \lg n & 2^{2^{n+1}}
\end{array}$$

Примечание: $\lg^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \le 1; \\ 1 + \lg^*(\lg n) & \text{иначе} \end{cases}$

4. Посчитать точно:
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$