Список вопросов по математическому анализу
АУ, первый семестр, осень 2014 года

Глава I. Введение

1. Множества: упорядоченная пара, декартово произведение, операции над множествами. Правила де Моргана.

2. Отношения: область определения, область значений, обратное отношение, композиция отношений, свойства, примеры.

3. Аксиомы вещественных чисел. Принцип Архимеда. Следствия.

4. ! Супремум и инфимум. Определение и теорема существования. Характеристика супремума.

5. ! Теорема о вложенных отрезках. Существенность условий.

Глава II. Последовательности в метрических пространствах

6. ! Метрические пространства и подпространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

7. Неравенства Коши–Буняковского и Минковского.

8. ! Открытые множества: определение и свойства.

9. ! Внутренние точки и внутренность множества.

10. ! Закнутые множества. Замыкание множества.

11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

12. ! Предельные точки. Связь с замыканием множества.

13. Супремум и инфимум замкнутых множеств.

14. ! Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

15. ! Предельный переход в неравенствах.

16. ! Теорема о двух милиционерах. Следствия.

17. ! Предел монотонной последовательности.

18. ! Конечномерное векторное пространство. Скалярное произведение и норма.

19. Арифметические свойства пределов последовательности.

20. Покоординатная сходимость.

21. ! Бесконечные пределы. Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$.

22. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими.

23. ! Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве.

24. Простейшие свойства компактных множеств.

25. Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие.

26. Теорема о вложенных параллелепипедах.

27. Теорема Гейне–Бореля.

28. Подпоследовательности.

29. Секвенциальная компактность. Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$.

30. ! Теорема Больцано–Вейерштрасса и другие следствия.

31. Диаметр множества: определение и свойство.

32. ! Фундаментальные последовательности. Полнота.

33. Полнота $\mathbb{R}^m$. Полнота компактных метрических пространств.

34. Верхний и нижний пределы. Частичные пределы. Связь между ними.

35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε.

36. Неравенство Бернулли.

37. ! Определение числа e.

38. Сравнение скорости возрастания последовательностей n^k, a^n, $n!$ и n^n.

39. Теорема Штольца (для неопределенности $\frac{0}{0}$).

40. Теорема Штольца (для неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$).

Глава III. Пределы и непрерывность отображений

41. ! Определения предела отображений и функций в точке.

42. ! Равносильность определения предела по Коши и по Гейне.

43. Свойства функций, имеющих предел.

44. Арифметические действия с пределами.

45. ! Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.

46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции.

47. Критерий Коши для отображений и для функций.

48. ! Непрерывные отображения. Определения по Коши и по Гейне. Непрерывность слева и справа.

49. Арифметические действия с непрерывными функциями. Теорема о стабилизации знака. Теорема о непрерывности композиции.

50. ! Характеристика непрерывности в терминах прообразов.

51. Непрерывность отображений из метрического пространства в $\mathbb{R}^m$.

52. ! Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса и другие следствия.

53. Теоремы о непрерывности обратного отображения и о непрерывности монотонной функции.

54. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора.

55. ! Лемма о связности отрезка. Теорема Больцано–Коши. Следствия.

56. Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Предел $\lim \frac{\sin x}{x}$.

57. Определение степенной функции и ее свойства.

58. Определение и непрерывность логарифма. Пределы $\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ и $\lim(1+x)^{1/x}$.

59. Пределы $\lim \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim \frac{(1+x)^p-1}{x}$ и $\lim \frac{a^x-1}{x}$.

60. Сравнение функций: отношение эквивалентности, символы Ландау, свойства, примеры.

Глава IV. Дифференциальное исчисление

61. ! Определение производной и дифференцируемости функции в точке.

62. Геометрический и физический смысл производной.

63. Левая и правая производные. Бесконечные производные. Примеры.

64. Непрерывность дифференцируемой функции.

65. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями.

66. ! Теорема о дифференцируемости композиции.

67. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

68. Производные элементарных функций.

69. ! Теоремы Ферма и Ролля.

70. ! Теорема Лагранжа и Коши.

71. ! Следствия теоремы Лагранжа. Характеристика монотонности дифференцируемых функций.

72. Теорема Дарбу.

73. Правило Лопиталя (для $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). Примеры.

74. Определение производной n-го порядка. Классы $C^n(E)$. Несовпадение классов $C^n(E)$.

75. Арифметические свойства производных n-го порядка. Производные n-го порядка элементарных функций.

76. Формула Тейлора для многочленов.

77. ! Формулы Тейлора с остатком в форме Пеано.

78. ! Формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

79. ! Формулы Тейлора для e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$.

80. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Разложения $\sin x$, $\cos x$ и e^x в ряд.

81. Иррациональность числа e.

82. ! Локальные максимумы и минимумы. Необходимое условие экстремума.

83. ! Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.

84. Выпуклые и вогнутые функции. Переформулировки определения выпуклости. Лемма о трех хордах.

85. Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции. Характеристика выпуклых функций с помощью касательных.

86. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных.

87. Неравенство Йенсена.

88. Неравенство о средних. Неравенства Гёльдера и Минковского.

Глава V. Интегральное исчисление

89. ! Определение первообразной и неопределенного интеграла. Общий вид первообразной. Примеры функций не имеющих первообразную.

90. Таблица интегралов. Линейность интеграла.

91. Теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле.

92. Формула интегрирования по частям.

Примечания

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Для не претендующих более чем на тройку доказательства в вопросах, относящиеся к метрическим пространствам, достаточно понимать лишь в случае расстояния на плоскости.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: супремум и инфимум; метрическое пространство, векторное пространство; предел последовательности, функции, отображения (в разных ситуациях и на разных языках); внутренние и предельные точки, открытые, замкнутые и компактные множества, секвенциальная компактность, компактность в $\mathbb{R}^m$; фундаментальные последовательности; непрерывность, теоремы Больцано–Коши и Вейерштрасса о непрерывных функциях; замечательные пределы, O-символика; определение производной и дифференцируемости функции в точке; производные элементарных функций; теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа; формула Тейлора, формулы Тейлора для e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$; условия монотонности функции; определение и необходимое условие экстремума; выпуклые функции; первообразная и неопределенный интеграл.