Вершинная и реберная связность графа

Домашнее задание №6

13 октября 2017 г.

Обязательная часть

1. (2 балла). Модифицировать описанный в предыдущем упражнении алгоритм построения графа с $\kappa(G) = k$ для случая нечетного k и четного n, а также для случая, когда оба эти параметра нечетные. Доказать, что и в этом случае связность полученных графов равна k.

2. (1.5 балла). Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geqslant n - 2$, где n — количество вершин в графе. Доказать, что в этом случае $\kappa(G) = \delta(G)$. Предъявить для любого $n > 3$ граф с $\delta(G) = n - 3$, у которого $\kappa(G) < \delta(G)$.

3. (1.5 балла). Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geqslant (n + k - 2)/2$, где n — количество вершин в графе, $n \geqslant k + 1$. Доказать, что в этом случае G является k-связным графом, то есть что $\kappa(G) \geqslant k$.

4. (2 балла). Пусть S есть произвольное подмножество множества $V(G)$ вершин простого связного графа G. В одном из упражнений предыдущей главы предлагалось доказать, что количество $\partial(S)$ ребер в реберном разрезе $\partial(S)$ рассчитывается по формуле

$$|\partial(S)| = \sum_{x \in S} \deg(x) - 2|E(G[S])|, \tag{1}$$

   где $G[S]$ — подграф, индуцированный подмножеством S. С использованием этого равенства, а также упражнения **??**, доказать, что граф Петерсена является трехсвязным графом.

5. (1.5 балла). С использованием равенства (1) доказать, что в графе Петерсена любой реберный разрез $\partial(S)$ мощности $|\partial(S)| = 3$ соответствует случаю $|S| = 1$.

6. (1.5 балла). Пусть G есть произвольный простой граф, S — произвольное собственное подмножество множества $V(G)$ вершин этого графа. Используя равенство (1), показать, что в случае $|\partial(S)| < \delta(G)$ мощность $|S|$ подмножества S строго больше $\delta(G)$.

7. (1.5 балла). Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geqslant (n - 1)/2$, где n — количество вершин в графе. Доказать, что в этом случае $\lambda(G) = \delta(G)$. Предъявить для любого $n > 2$ граф с $\delta(G) = (n - 2)/2$, у которого $\lambda(G) < \delta(G)$.

Дополнительная часть

1. (2.5 балла). Пусть G есть простой связный граф, диаметр которого равен двум, а $[S, \bar{S}]$, $|S| \leqslant |\bar{S}|$, — минимальный реберный разрез в этом графе. Доказать, что любая вершина $x \in S$ имеет хотя бы одну смежную с ней вершину $y \in \bar{S}$. Используя этот факт, показать, что в таком графе $\lambda(G) = \delta(G)$.